

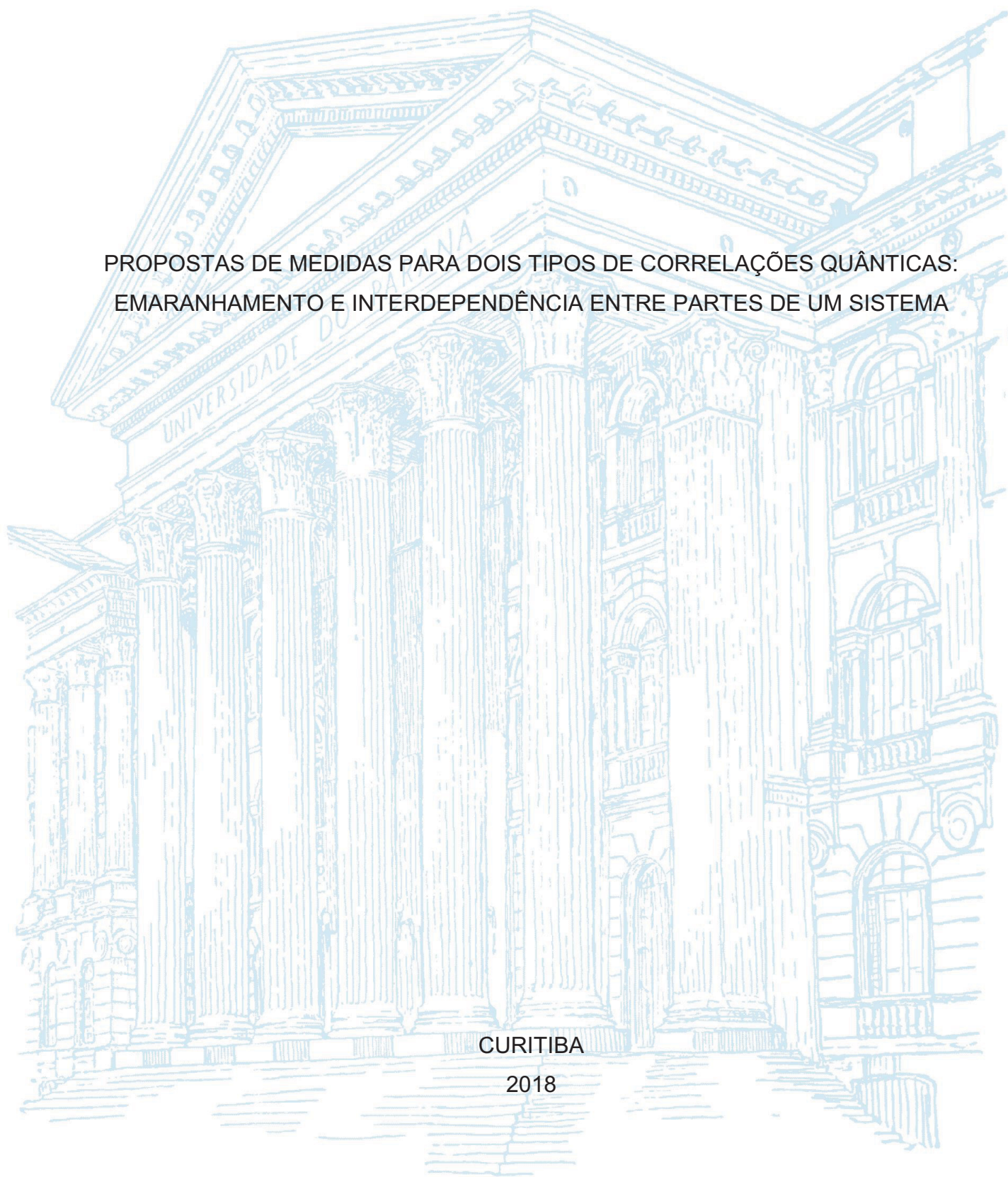
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DANIEL FERNANDES ORSINI

PROPOSTAS DE MEDIDAS PARA DOIS TIPOS DE CORRELAÇÕES QUÂNTICAS:  
EMARANHAMENTO E INTERDEPENDÊNCIA ENTRE PARTES DE UM SISTEMA

CURITIBA

2018



DANIEL FERNANDES ORSINI

PROPOSTAS DE MEDIDAS PARA DOIS TIPOS DE CORRELAÇÕES QUÂNTICAS:  
EMARANHAMENTO E INTERDEPENDÊNCIA ENTRE PARTES DE UM SISTEMA

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos G. E. da Luz

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

O76p

Orsini, Daniel Fernandes

Propostas de medidas para dois tipos de correlações quânticas:  
emaranhamento e interdependência entre partes de um sistema / Daniel  
Fernandes Orsini. – Curitiba, 2018.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,  
Programa de Pós-Graduação em Física, 2018.

Orientador: Marcos Gomes Eleutério da Luz. -

1. Mecânica quântica. 2. Correlações quânticas. 3. Emaranhamento. I.  
Universidade Federal do Paraná. II. Luz, Marcos Gomes Eleutério da. Título.

CDD: 530.12

Bibliotecária: Vanusa Maciel - CRB - 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR CIÊNCIAS DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA

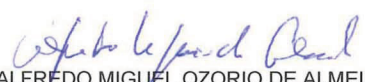
## TERMO DE APROVAÇÃO

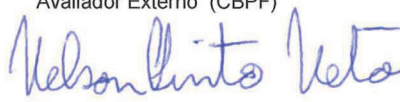
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **DANIEL FERNANDES ORSINI** intitulada: **"Propostas de medidas para dois tipos de correlações quânticas: emaranhamento e interdependência entre partes de um sistema"**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 30 de Agosto de 2018.

  
MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

  
ALFREDO MIGUEL OZORIO DE ALMEIDA  
Avaliador Externo (CBPF)

  
NELSON PINTO NETO  
Avaliador Externo (CBPF)

  
MARLUS KOEHLER  
Avaliador Interno (UFPR)

## **AGRADECIMENTOS**

- A Mariana, pelo apoio e incentivo constantes;
- Ao professor Marcos G. E. da Luz, pela orientação e por todo o apoio durante o Doutorado;
- Aos familiares e amigos, que sempre estiveram presentes;
- Ao CNPq pelo suporte financeiro;
- Ao Grupo FISUX pelo código de formatação dessa dissertação.

## RESUMO

Neste trabalho, estudamos emaranhamento e outras correlações quânticas em estados puros de muitas partes. Apresentamos novos resultados para a medida de emaranhamento  $C$ , já proposta em trabalho anterior, tornando-a mais completa e consolidando nosso entendimento a seu respeito. Além disso, utilizamos  $C$  para criar um método geral de construir medidas, em que propomos a minimização de determinadas funções como quantificação do emaranhamento, sendo que  $C = 0$  aparece como uma restrição imposta ao processo. Prosseguindo, exploramos a questão de como o emaranhamento se apresenta em estados com muitas partes, observando como a interferência com uma das partes afeta em maior ou menor grau o restante do estado, fornecendo também informação sobre as partes em que não se interferiu. Nesse contexto, fazemos propostas de medidas de interdependência entre partes de um sistema para capturar quantitativamente essa característica.

Palavras-chave: Mecânica quântica. Correlações quânticas. Emaranhamento.

## ABSTRACT

In this work, we study entanglement and other quantum correlations in multipartite pure states. We present new results to the entanglement measure  $C$ , which was proposed in previous work, so as to make it more complete and to consolidate our knowledge about it. Also, we use  $C$  to create a general method to construct entanglement measures. We do that proposing the minimization of certain functions as the measure, and  $C = 0$  appears as a boundary condition in the process. After that, we explore the question about how entanglement presents itself in multipartite states, noticing how interference with one part affects the rest of the state to a greater or lesser degree, while providing us information about the other parts. In this context, we propose a measure of interdependence between the parts of a system to estimate quantitatively this aspect.

Keywords: Quantum mechanics. Quantum correlations. Entanglement.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Aspectos gerais sobre o formalismo da mecânica quântica e correlações quânticas</b>	<b>14</b>
2.1	O Conceito de Estado e os Princípios Básicos da Mecânica Quântica	14
2.1.1	Vetores de estado . . . . .	14
2.1.2	As regras básicas da mecânica quântica . . . . .	15
2.2	Correlações quânticas . . . . .	18
2.2.1	O princípio da superposição e correlações quânticas . . . . .	19
2.2.2	Estados EPR e a completeza da mecânica quântica . . . . .	20
2.2.3	Correlações quânticas, desigualdades de Bell e o teste CHSH . . . .	22
2.3	Emaranhamento . . . . .	26
2.3.1	Aspectos Gerais . . . . .	26
2.3.2	Condições necessárias usualmente assumidas para a quantificação de emaranhamento . . . . .	28
2.3.3	Algumas medidas de emaranhamento . . . . .	30
2.4	Outras formas de correlações quânticas . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Uma medida simples para emaranhamento: medida <math>C</math></b>	<b>36</b>
3.1	Definição da medida $C$ . . . . .	36
3.2	Comparação entre $C$ e outras medidas . . . . .	39
3.3	$C$ como generalização de certos resultados na literatura . . . . .	41
3.4	Normalização de $C$ . . . . .	42
3.5	Estados GHZ generalizados e maximização de $C$ . . . . .	42
3.6	Relação entre $C$ e a medida da distância $D$ para estados puros $2 \times 2$	43
<b>4</b>	<b>Propostas de medidas de emaranhamento através da função <math>C</math> combinada com processos de minimização</b>	<b>50</b>
4.1	A questão geral da definição de medidas de emaranhamento e de correlações quânticas . . . . .	50
4.2	A ideia de “deformar” um estado no espaço de coeficientes e medidas $\mu_C$ . . . . .	51
4.3	Uma formulação matemática para $\mu_C$ . . . . .	52



4.4	Estados bipartidos de qubits . . . . .	54
4.4.1	Uma escolha particular para $\mu_C$ : obtendo a medida de distância . .	55
4.4.2	Método da distância aplicado ao estado bipartido de qubits com coeficientes reais . . . . .	56
4.5	Relaxando as condições para o procedimento da seção 4.3 . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Propostas de medidas de grau de interdependência entre partes de um sistema quântico</b>	<b>60</b>
5.1	Algumas considerações interpretativas sobre grau de emaranhamento	60
5.2	Propriedades de dois estados paradigmáticos . . . . .	63
5.3	Comparações entre graus de emaranhamento de distintas medidas para dois estados paradigmáticos . . . . .	64
5.4	Medida de grau de interdependência entre partes de um sistema . .	69
5.4.1	Estados relativos . . . . .	70
5.4.2	Uma expressão para medidas de interdependência . . . . .	72
5.5	$\mathbb{F}$ cuja função $f$ é dada pela medida $C$ . . . . .	73
5.5.1	Definição de $F_C$ . . . . .	73
5.5.2	Verificação das condições matemáticas básicas de $F_C$ e sua inter- pretação . . . . .	74
5.5.3	Aplicação de $F_C$ a casos de interesse . . . . .	75
5.6	$\mathbb{F}$ cuja função $f$ é dada pela entropia de Shannon . . . . .	78
5.6.1	Entropia de Shannon . . . . .	78
5.6.2	Definição de $F_H$ . . . . .	80
5.6.3	Verificação das condições matemáticas básicas de $F_H$ . . . . .	81
5.6.4	Aplicação de $F_H$ a casos de interesse . . . . .	84
5.7	Interpretação e comparação entre $F_C$ e $F_H$ . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Correlações em observáveis de estados EPR e a consistên- cia lógica da argumentação EPR</b>	<b>88</b>
6.1	Alguns aspectos gerais a respeito de estados EPR e medidas feitas sobre eles . . . . .	89
6.2	Estados EPR e observáveis dadas por operadores incompatíveis . .	91
6.2.1	Transformações entre bases associadas a operadores compatíveis e incompatíveis . . . . .	92
6.2.2	Correlações entre as observáveis dos estados EPR . . . . .	93
6.3	Um resumo da lógica EPR . . . . .	94
6.3.1	A visão de EPR a respeito de “realidade física” e de algumas das estruturas formais da mecânica quântica . . . . .	94
6.3.2	Argumentos EPR que sustentam que a mecânica quântica não é completa . . . . .	95

6.4	A análise EPR revisitada tendo em vista as condições de incompatibilidade para estados EPR . . . . .	97
6.5	A matriz de transformação para sistemas de spin $1/2$ com base com direção arbitrária . . . . .	100
6.6	Tipos de observáveis discretas e tipos de operadores correspondentes considerados para a construção de estados EPR. . . . .	101
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>103</b>
	<b>Referências</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Operações Locais e Comunicação Clássica</b>	<b>118</b>
A.1	Monotonicidade local . . . . .	119
<b>B</b>	<b>Medida de correlação através da distância Manhattan, o caso de 2 qubits</b>	<b>121</b>
B.1	Soluções para os sistemas . . . . .	123
B.1.1	Todos os $s_i$ iguais . . . . .	123
B.1.2	Apenas um $s$ diferente . . . . .	125
B.1.3	$s_i$ iguais dois a dois . . . . .	130
B.2	Tratamento de casos com $s_i = 0$ . . . . .	131
B.2.1	Estados com $x = a$ . . . . .	131
B.2.2	Estados com $y = b$ . . . . .	136
B.2.3	Estados com $z = c$ . . . . .	137
B.3	Soluções de sistemas com duas variáveis fixas . . . . .	140
B.3.1	Soluções com $x = a$ e $y = b$ . . . . .	140
B.3.2	Soluções com $x = a$ e $z = c$ . . . . .	141
B.4	Minimizando $M$ . . . . .	141

# Introdução

O início do século XX viu a física clássica ser questionada em diversos de seus princípios [1]. A teoria da relatividade reformulou nossas noções de espaço e tempo, enquanto a mecânica quântica colocava em cheque tanto a existência de uma realidade objetiva, independente de observação, quanto pressupostos de localidade e separabilidade. Embora a Relatividade tenha sido resultado do trabalho de diversos cientistas, o senso comum costuma creditá-la apenas a Albert Einstein [2–5]. O mesmo não se passa com a mecânica quântica. Seu surgimento é associado ao esforço coletivo de diversos pesquisadores, sem que um nome destaque-se unicamente frente aos outros.

A mecânica quântica moderna tem início com a formulação matricial feita por Heisenberg em 1925 [6], e aprimorada poucos meses depois por Born, Jordan e o próprio Heisenberg. Cerca de um ano depois, Schrödinger publica sua equação de onda para explicar os fenômenos quânticos observados até então [7] e, posteriormente, verifica que sua formulação e a de Heisenberg são equivalentes. Por fim, após alguns anos, von Neumann [8] demonstra que a mecânica quântica pode ser formalizada utilizando-se operadores Hermitianos em espaços de Hilbert, sendo as teorias de Schrödinger e Heisenberg representações particulares dessas operações [9].

As conclusões que surgiram a partir da teoria quântica eram inesperadas e incompatíveis com a física clássica e sua concepção intuitiva de mundo. O momento angular, a energia, e outras grandezas de objetos, quando em determinadas configurações, deixam de ser quantidades contínuas e passam a ser discretas. A própria realidade atribuída a características dos objetos, como sua posição, não é claramente definida até que seja mensurada, de maneira que a própria noção de trajetória se perde. Passa a existir um limite fundamental para a precisão com que se pode obter o valor de grandezas chamadas complementares, ideia condensada no princípio da incerteza de Heisenberg. Entre as concepções não-intuitivas do mundo quântico, destaca-se a correlação não-local apresentada por estados quânticos. Ações feitas em um sistema podem afetar instantaneamente outro, independentemente da distância entre eles.

Os primeiros a notar esse tipo de correlação foram Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [10]. Eles conceberam uma função de onda para descrever dois sistemas, e mostraram que uma medição no primeiro determinava uma certa grandeza no segundo. Entretanto, di-

ferentes medições no primeiro determinariam diferentes grandezas atribuídas ao segundo, sendo que essas grandezas, para o caso tratado pelos autores, eram incompatíveis. Tal conclusão contradizia o princípio da incerteza de Heisenberg, parte fundamental da mecânica quântica, e disto os autores deduzem que esta teoria não abarca todos os elementos da realidade de um sistema e é, portanto, incompleta. Schrödinger [11] discordava de tal conclusão, argumentando que tais correlações eram um aspecto da natureza, e não um problema da teoria quântica, dando a essa característica o nome de *Verschränkung*, traduzido como “emaranhamento”. No mesmo ano, Niels Bohr também apresentou uma resposta a EPR, concentrando seu argumento ao redor de uma análise cuidadosa envolvendo o conceito de complementaridade [12, 13].

Um dos pressupostos assumidos no argumento EPR é o princípio da localidade. Com esse conceito os autores supõem que, dados dois sistemas separados no espaço, nenhuma mudança pode acontecer em um devido a uma ação feita sobre o outro. Bell elabora uma formulação matemática dessa noção, e demonstra que certas previsões estatísticas feitas pela mecânica quântica são impossíveis de ser obtidas a partir do que definimos como um modelo local de variáveis ocultas [14]. Essas restrições são matematicamente representadas pelas desigualdades de Bell. Clauser *et al.* [15] reformularam o argumento de Bell de maneira a facilitar sua implementação em laboratórios, o que foi feito por Aspect *et al.* [16], que verificaram a violação da localidade. Diversos outros experimentos foram feitos nos anos seguintes, todos apontando a incapacidade de teorias locais em descrever a natureza [17–21].

A ideia de não-localidade e emaranhamento se confundiam até o fim da década de 80. Foi então que Werner formaliza o conceito de emaranhamento para estados mistos e demonstra que existem classes de estados emaranhados que podem ser descritos por teorias locais [22]. A formalização do conceito deu ímpeto ao aumento na pesquisa relacionada a emaranhamento, surgindo propostas de como explorá-lo realizando tarefas impossíveis para sistemas clássicos [23]. Exemplos destas tarefas são: criptografia quântica [24], codificação quântica densa [25] e teleporte quântico [26], todas demonstradas experimentalmente [27–34]. Outro campo florescente é a computação quântica [35], onde diversos algoritmos quânticos foram criados [36] após Shor construir um algoritmo para determinar se um número é primo ou não [37].

Entre as muitas questões levantadas a partir do estudo do emaranhamento, destaca-se a quantificação do mesmo. Neste ramo, o emaranhamento deixa de ser apenas uma característica possuída ou não por estados, e se torna uma quantidade. Dessa forma, dados dois estados, uma medida de emaranhamento não dirá apenas se algum deles é ou não emaranhado, mas também atribuirá valores a esse emaranhamento, de forma que possamos considerar um dos estados com menor, maior, ou igual emaranhamento que o outro. Embora essa questão esteja relativamente bem resolvida para estados bipartidos, ao tratarmos de sistemas com mais de dois graus de liberdade, puros ou mistos, o problema se torna mais complexo e as medidas de emaranhamento tendem a discordar entre si, produzindo diferentes ordenamento de estados [38, 39]. Medidas com ordenamentos diferentes não classificam da mesma forma estados quanto à quantidade de emaranhamento: um

estado pode ser mais emaranhado que o outro segundo uma medida, e ocorrer o inverso segundo outra, caso estas não ordenem equivalentemente.

A ausência de consenso entre as medidas quanto ao ordenamento produzido e o aparecimento de fenômenos quânticos cuja explicação não é possível utilizando-se apenas o emaranhamento deram origem a buscas por novas formas de expressar e entender correlações quânticas. Assim, o estudo de problemas relacionados a emaranhamento se ramificou para além do emaranhamento em si. Por um lado, novas medidas de correlações quânticas foram criadas. Como exemplo, citamos a discórdia [40], que identifica correlações quânticas que não são captadas por medidas de emaranhamento. Por outro, os próprios métodos matemáticos utilizados no estudo do emaranhamento são aplicados em outras áreas, devido ao sucesso que esses métodos alcançaram em sua área de origem. Como exemplo, citamos o estudo em quantificação de coerência de Baumgratz [41].

Diferentes correlações quânticas captam diferentes aspectos dos estados a que se aplicam. Essas correlações não clássicas podem originar-se de princípios fundamentais, como a perturbação necessária causada por uma medição local em um sistema, ou a persistência de coerência quântica em todas as bases possíveis [42]. Parte do nosso trabalho se insere nesse contexto mais amplo para correlações quânticas. Além de estudarmos medidas de emaranhamento mais tradicionais, tentaremos olhar para como uma intervenção local em um sistema composto pode afetar o restante desse sistema, fornecendo maior ou menor informação sobre suas outras partes, e também afetando a estatística de possíveis medições que façamos posteriormente. Abordaremos o problema de maneira geral, e, a partir de nossas propostas, estudaremos aspectos conceituais básicos apresentados por estados quanticamente correlacionados.

Esta tese apresenta trabalhos inseridos dentro do contexto de correlações quânticas e suas medidas, estando organizada da seguinte maneira:

No capítulo 2, apresentamos conceitos, definições e grandezas essenciais para o entendimento do restante do trabalho.

No capítulo 3, iremos rerepresentar uma proposta feita em nossa dissertação de mestrado [43], onde quantificamos, a partir de uma medida denominada  $C$ , o emaranhamento para estados puros de quaisquer dimensões. Definiremos essa medida com maior rigor, estabelecendo propriedades de  $C$  e relações que ela estabelece com outras, resultados não obtidos na dissertação citada.

No capítulo 4, iremos utilizar  $C$  como vínculo a ser obedecido em uma nova construção de medidas de emaranhamento. Esse formato será construído de forma geral e proporcionará a capacidade de gerarmos diversas medidas. O procedimento proposto envolve a “deformação” dos coeficientes de um estado emaranhado de maneira a torná-lo separável (o que identificaremos com  $C = 0$ ). Essa “deformação” será feita de acordo com critérios de minimização de uma função de penalização, que será por sua vez utilizada, na sua condição de mínimo, como medida de emaranhamento.

No capítulo 5, iremos explorar como, e em que grau, a manipulação de uma parte de um estado emaranhado pode afetar as outras partes de um sistema. Iremos fazer uma proposta geral de medida de interdependência entre partes de um sistema, diferente de

emaranhamento, que busque captar essa alteração e o “ganho de informação” que obtemos de um estado ao fazermos uma medição local em uma de suas partes. Iremos construir duas versões particulares dessa proposta geral, e discutiremos as diferenças entre as duas.

No capítulo 6, faremos uma análise do artigo EPR [10], levantando pontos não notados no mesmo. EPR faz certas objeções à mecânica quântica como uma teoria que não pode descrever de forma completa a realidade. Mostraremos que essas objeções ficam descaracterizadas se levarmos em conta correlações entre observáveis que naturalmente surgem da construção matemática dos estados EPR e da teoria quântica.

Por último, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

# Aspectos gerais sobre o formalismo da mecânica quântica e correlações quânticas

## 2.1 O Conceito de Estado e os Princípios Básicos da Mecânica Quântica

### 2.1.1 Vetores de estado

Como em outras construções teórico-conceituais de distintas áreas da física, também em mecânica quântica o conjunto de grandezas, configurações e estrutura dinâmica caracterizando um sistema é genericamente denominado de *estado*. Entretanto, no arcabouço matemático da mecânica quântica, um estado é especificado por um vetor pertencente ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  (ou seja, um espaço vetorial linear complexo com produto interno e onde toda série de Cauchy converge no próprio espaço) associado ao problema particular considerado. No que se segue, iremos descrever as propriedades mais elementares destes vetores de estado, usando para tal tanto a notação matricial quanto a notação de Dirac. Por simplicidade, exemplificaremos as idéias inicialmente com um espaço bidimensional, ou seja, com um sistema de dois níveis. Podemos chamar tal sistema de qubit.

Em notação matricial, um vetor com duas componentes (portanto num espaço vetorial bidimensional) é escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

com  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sendo as bases deste espaço. Já em notação de Dirac, o mesmo vetor (chamado de *ket*) é escrito como

$$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle. \quad (2.2)$$



Neste caso, os vetores são denominados *kets*  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ . Em ambas situações, os números complexos  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes das respectivas expansões.

Para um segundo vetor de estado  $\phi = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , seu produto interno com  $\psi$  é dado por  $\phi^\dagger \cdot \psi = \mu^* \alpha + \nu^* \beta$ , onde temos a matriz linha  $\phi^\dagger = (\mu^* \ \nu^*) = \mu^*(1 \ 0) + \nu^*(0 \ 1)$ . Assim, a norma quadrada do vetor  $\psi$  é  $\psi^\dagger \cdot \psi = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ . Por sua vez, na notação de Dirac,  $\phi^\dagger$  é representado pelo *bra*  $\langle\phi| = \alpha^* \langle 1| + \beta^* \langle 2|$ . Desta forma, o produto interno de  $\phi$  com  $\psi$  é escrito simplesmente como  $\langle\phi|\psi\rangle = \mu^* \alpha + \nu^* \beta$ , que segue diretamente das regras para os elementos de base:  $\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$  e  $\langle 1|2\rangle = \langle 2|1\rangle = 0$ .

Transformações lineares  $A$  (definidas sobre os vetores de estado do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ ) são chamados de *operadores*, e descritos por matrizes complexas na forma (matrizes  $2 \times 2$  no caso bidimensional):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

com os coeficientes  $a$ 's sendo números complexos. Se  $A$  representa uma observável física (a princípio uma quantidade que possa ser medida através de medições experimentais),  $A$  precisa ser uma matriz Hermetiana  $A^\dagger = A$  (para  $A^\dagger$  a matriz complexa transposta de  $A$ ). Na notação de Dirac escrevemos tal operador como  $\hat{A}$ , tal que

$$\hat{A} = a_{11}|1\rangle\langle 1| + a_{12}|1\rangle\langle 2| + a_{21}|2\rangle\langle 1| + a_{22}|2\rangle\langle 2|. \quad (2.4)$$

A atuação de  $\hat{A}$  sobre  $|\psi\rangle$  é dada por

$$\begin{aligned} \hat{A}|\psi\rangle &= a_{11}\alpha|1\rangle\langle 1|1\rangle + a_{12}\alpha|1\rangle\langle 2|1\rangle + a_{21}\alpha|2\rangle\langle 1|1\rangle + a_{22}\alpha|2\rangle\langle 2|1\rangle \\ &\quad + a_{11}\beta|1\rangle\langle 1|2\rangle + a_{12}\beta|1\rangle\langle 2|2\rangle + a_{21}\beta|2\rangle\langle 1|2\rangle + a_{22}\beta|2\rangle\langle 2|2\rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

que da ortonormalidade dos elementos de base  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , se reduz a

$$\hat{A}|\psi\rangle = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)|1\rangle + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)|2\rangle. \quad (2.6)$$

A generalização para um espaço de Hilbert  $N$ -dimensional é direta, simplesmente considerando-se de forma apropriada  $N$  elementos de base e a respectiva extensão das relações de ortonormalização entre todos esses elementos.

### 2.1.2 As regras básicas da mecânica quântica

A mecânica quântica tem uma estrutura matemática-formal bastante elegante e concisa. Tal estrutura permite que seus princípios básicos sejam descritos por um conjunto bastante pequeno de regras, usualmente chamados de *postulados da mecânica quântica*. Dependendo do autor, ver por exemplo [35], eles se resumem a quatro:

- Postulado 1

*A qualquer sistema físico isolado existe associado um espaço vetorial complexo com produto interno (ou seja, um espaço de Hilbert), conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu vetor de estado, um vetor unitário no espaço de estados.*

- Postulado 2

*A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, o estado  $|\Psi(t_1)\rangle$  de um sistema em um tempo  $t_1$  está relacionado ao estado  $|\Psi(t_2)\rangle$  do sistema em  $t_2$  por um operador unitário  $U$  que depende somente de  $t_1$  e  $t_2$ :  $|\Psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\Psi(t_1)\rangle$ .*

- Postulado 3

*As medições quânticas são descritas por determinados operadores de medição  $\{M_m\}$ . Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema. O índice  $m$  se refere aos possíveis resultados da medição. Se o estado de um sistema quântico for  $|\Psi\rangle$ , imediatamente antes da medição, a probabilidade de um resultado  $m$  ocorrer é dada por:*

$$p(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle, \quad (2.7)$$

*e o estado do sistema após a medição será:*

$$\frac{M_m |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}}. \quad (2.8)$$

*Os operadores de medição satisfazem a relação de completude (com  $I$  o operador identidade):*

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (2.9)$$

- Postulado 4

*O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados de sistemas físicos individuais. Se os sistemas forem enumerados de 1 até  $n$ , e o sistema  $i$  for preparado no estado  $|\Psi_i\rangle$ , decorre que o estado do sistema composto será  $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_n\rangle$ .*

Os postulados acima descrevem as regras da mecânica quântica ao tratarmos um sistema cujo estado  $|\psi\rangle$  seja inicialmente inteiramente conhecido. É possível, entretanto, termos que analisar um sistema para o qual sabemos apenas a probabilidade  $p_i$  do mesmo estar em um determinado estado  $|\psi_i\rangle$ . No primeiro caso, dizemos que o sistema se encontra num estado puro, ao passo que no segundo, o sistema se encontra num estado misto.

A mecânica quântica trata estados mistos utilizando o conceito de operador densidade. Dado um sistema que possua probabilidades  $p_i$  de estar em determinado estado descrito por  $|\psi_i\rangle$ , seu operador densidade é dado por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i p_i \rho_i, \quad (2.10)$$

sendo  $p_i$  números reais não-negativos com  $p_i \leq 1$  e  $\sum_i p_i = 1$ .

Para que um operador arbitrário qualquer seja um operador densidade, ele deve satisfazer três condições:

- $\rho^\dagger = \rho$  (hermiticidade).
- $\text{Tr}[\rho] = 1$  (com  $\text{Tr}[A]$  significando o traço de  $A$ ).
- $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$  para qualquer estado quântico puro  $|\phi\rangle$ .

Os postulados da mecânica quântica podem ser reformulados, de modo a considerar o operador densidade como um objeto matemático apropriado para caracterizar um sistema físico. Dessa maneira, temos:

- Postulado 1

*Associado a qualquer sistema físico existe um espaço vetorial complexo com produto interno, um espaço de Hilbert, conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu operador densidade, que é um operador positivo com traço 1 atuando no espaço de estados. Se o sistema está no estado  $\rho_i$  com probabilidade  $p_i$ , o seu operador densidade será  $\sum_i p_i \rho_i$ .*

- Postulado 2

*A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por transformações unitárias. Isto é, o estado  $\rho(t_1)$  do sistema em um instante  $t_1$  está relacionado ao estado  $\rho(t_2)$  em um instante  $t_2$  por um operador unitário  $U$  que depende somente de  $t_1$  e  $t_2$ , sendo a relação entre eles  $\rho(t_2) = U(t_2, t_1) \rho(t_1) U^\dagger(t_2, t_1)$ .*

- Postulado 3

*Medições quânticas são descritas por uma coleção de operadores de medição  $\{M_m\}$ . Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema sendo medido. O índice  $m$  refere-se a um resultado possível da medição. Se o estado do sistema imediatamente antes da medição for  $\rho$ , a probabilidade de o resultado  $m$  ocorrer será*

$$p(m) = \text{Tr}[M_m^\dagger M_m \rho], \quad (2.11)$$

*e o estado do sistema após a medição será*

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.12)$$

*Os operadores de medição satisfazem a seguinte equação de completude*

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (2.13)$$

- Postulado 4

*O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados de suas componentes. Além disso, se tivermos sistemas numerados de 1 a  $n$ , e o  $i$ -ésimo sistema for preparado em  $\rho_i$ , o estado do sistema composto será  $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n$ .*

Esses postulados são equivalentes aos anteriores, e se tornam extremamente úteis ao se trabalhar com sistemas cujos estados não são completamente conhecidos. Vale notar outra propriedade do operador densidade, a saber

$$\text{Tr}[\rho^2] \leq 1, \quad (2.14)$$

sendo a igualdade alcançada apenas para estados puros.

O operador densidade também pode ser utilizado para descrever um ou mais subsistemas (ou seja, “partes”) de um sistema “maior” (por exemplo, um sistema composto). Para isso, associa-se a um dado subsistema  $A$  do sistema maior um operador que é o operador densidade reduzido  $\rho_A$ . Para tal, consideramos o operador densidade total e tomamos o seu traço sobre todos os graus de liberdade que não estejam relacionados a  $A$ . Por exemplo, dado um estado  $\rho_{AB}$  que represente um sistema descrito no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , definimos

$$\rho_A := \text{Tr}_B[\rho_{AB}], \quad \rho_B := \text{Tr}_A[\rho_{AB}], \quad (2.15)$$

sendo  $\rho_A$  e  $\rho_B$  os operadores densidade reduzidos dos subsistemas  $A$  e  $B$ , respectivamente. Operadores densidade reduzidos fornecem todas as previsões probabilísticas sobre os subsistemas aos quais estão relacionados, obedecendo as mesmas regras previamente postuladas para os operadores densidade do sistema maior.

## 2.2 Correlações quânticas

O conceito de correlação é bastante geral e permeia todos os sistemas naturais. Para ilustrar a idéia de forma simples, suponha duas variáveis,  $\alpha$  e  $\beta$ , que caracterizam quantidades relevantes e mensuráveis de um sistema. Se dizemos que ambas estão correlacionadas, queremos dizer que valores obtidos para  $\alpha$  não são independentes dos valores obtidos

para  $\beta$ . Em outras palavras, ao determinarmos de alguma forma o valor de  $\alpha$ , adquirimos informação parcial ou total para prever o valor de  $\beta$ , e vice-versa.

Correlações aparecem em diversos fenômenos em todas as áreas da física, cuja questão central é então entender o que faz quantidades distintas se interligarem. Em física clássica existe uma grande variedade de mecanismos e interações que provocam correlações em um sistema. Logo, a princípio poderíamos prever ao menos alguns aspectos do comportamento de medições de  $\alpha$  em relação às de  $\beta$ , eventualmente nos tornando hábeis em calcular uma função do tipo  $c(\alpha, \beta)$ . As leis da mecânica clássica e da física estatística clássica nos diriam o que esperar do comportamento e que valores poderia assumir  $c(\alpha, \beta)$ .

Correlações quânticas são justamente vínculos estabelecidos entre  $\alpha$  e  $\beta$ , levando a uma função  $q(\alpha, \beta)$ , cujas propriedades não podem ser explicadas por processos puramente clássicos. Apenas as regras da mecânica quântica podem determinar as interdependências entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 2.2.1 O princípio da superposição e correlações quânticas

Uma das peculiaridades mais relevantes da mecânica quântica e talvez a maior fonte de correlações (quânticas) é o princípio da superposição. Como um exemplo arbitrário (não necessariamente envolvendo correlação em informação quântica), suponha que as quantidades físicas  $\alpha$  e  $\beta$ , uma vez mensuradas, só podem dar os resultados  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  e  $\beta_+$ ,  $\beta_-$ , respectivamente. No caso de  $\alpha_{\pm}$ , os autoestados ortonormais correspondentes seriam  $|\psi\rangle = |\alpha_{\pm}\rangle$  (o mesmo para  $\beta_{\pm}$  em termos de  $|\beta_{\pm}\rangle$ ). Entretanto, de acordo com a mecânica quântica, um estado possível para o sistema (digamos em  $t = t_i$ ) é

$$|\psi(t_i)\rangle = c_+|\alpha_+\rangle + c_-|\alpha_-\rangle. \quad (2.16)$$

Sabemos que para tal  $|\psi\rangle$ , a probabilidade de medirmos  $\alpha_{\pm}$  é  $p_{\pm} = |c_{\pm}|^2$ .

A interpretação clássica para a Eq. (2.16) seria:  $|\psi\rangle$  representa o desconhecimento estatístico do valor de  $\alpha$ , embora saibamos ter probabilidade  $p_+$  de ser  $\alpha_+$  e  $p_-$  de ser  $\alpha_-$ , sendo que o sistema se encontra em um destes dois possíveis estados, só não sabemos *a priori* qual. Para o mundo quântico esta interpretação não está correta. O sistema *está* na superposição das duas possíveis situações, isto é, o estado atual do problema *compreende* a soma dos dois estados  $|\alpha_{\pm}\rangle$ . Não importa que após a medição necessariamente encontraremos  $|\psi\rangle$  ou em  $|\alpha_+\rangle$  ou em  $|\alpha_-\rangle$ . Em  $t = t_i$  a descrição correta é assumirmos o sistema nos dois autoestados  $\alpha$ .

Suponha agora uma evolução temporal de  $|\psi\rangle$ , de tal forma que em  $t = t_f$  tenhamos

$$|\psi(t_f)\rangle = d_+|\beta_+\rangle + d_-|\beta_-\rangle. \quad (2.17)$$

Se definirmos de forma extremamente direta (e simples) uma função correlação entre as quantidades  $\alpha$  e  $\beta$  nos tempos  $t_i$  e  $t_f$  como  $q(\alpha, \beta) = |\langle\psi(t_f)|\psi(t_i)\rangle|^2$ , encontramos

$$(\mathcal{O}_{\mu\nu} = \langle \beta_\mu | \alpha_\nu \rangle)$$

$$\begin{aligned} q(\alpha, \beta) = & p_+^{(\beta)} p_+^{(\alpha)} |\mathcal{O}_{++}|^2 + p_+^{(\beta)} p_-^{(\alpha)} |\mathcal{O}_{+-}|^2 + p_-^{(\beta)} p_+^{(\alpha)} |\mathcal{O}_{-+}|^2 \\ & + p_-^{(\beta)} p_-^{(\alpha)} |\mathcal{O}_{--}|^2 + \mathcal{O}_{int}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aqui,  $\mathcal{O}_{int}$  representa a soma de todos os demais termos cruzados advindos da multiplicação de fatores do tipo  $\mathcal{O}_{\mu'\nu'}$  com  $\mathcal{O}_{\mu''\nu''}^*$ . Note que os coeficientes que os multiplicam não são na forma de “probabilidades clássicas”  $p^{(\beta)} p^{(\alpha)}$ . Desta forma, o termo de *interferência*  $\mathcal{O}_{int}$  não tem analogia clássica e é um bom exemplo de correlação advinda de um aspecto puramente quântico do sistema.

As correlações discutidas nesta tese tem estruturas matemática e conceitual bem mais elaboradas do que o caso apresentado acima. O caso aqui tratado como exemplo possui apenas uma parte, ou seja, não é composto de subsistemas que possam ser mensurados individualmente, a exemplo de dois qubits, em que há duas “partes”. Ao longo deste trabalho trataremos de sistemas multipartidos com correlações quânticas entre suas partes. Entretanto, não é por isso que o princípio da superposição deixa de fazer parte da gênese da grande maioria das mesmas.

Devemos notar também que, no contexto particular de informação quântica, correlações quânticas tem uma definição mais restrita do que a apresentada por nosso exemplo. Essa definição envolve os vínculos descritos acima, mas sempre necessariamente associam quantidades (a exemplo de  $\alpha$  e  $\beta$ ) pertencentes a partes distintas do sistema global. Logo, as funções de correlação são do tipo  $q(\alpha_r, \beta_s)$ , com  $r$  e  $s$  sendo índices referentes a partes distintas do sistema total.

### 2.2.2 Estados EPR e a completeza da mecânica quântica

Einstein, Podolsky e Rosen [10] (trabalho comumente conhecido pelo acrônimo EPR), em 1935, desenvolvem uma cadeia de raciocínios de modo a chegar à conclusão de que a imposição, entre outras hipóteses, de que a mecânica quântica seja uma teoria local leva ao resultado de que ela seja uma teoria física incompleta. Para chegar a esta conclusão, em primeiro lugar os autores propõem que se conhecemos com 100% de certeza o valor de uma certa quantidade física mensurável de um sistema, então para este sistema podemos estabelecer, associado a essa quantidade, um elemento de realidade. Em segundo, por localidade EPR entende que se dois sistemas não interagem entre si, então nenhuma mudança real pode acontecer em um dos sistemas devido a algo que se faça ao outro. Por último, uma teoria seria completa apenas se todos os elementos de realidade tivessem necessariamente uma contrapartida dentro da estrutura da teoria. O argumento em [10] é que um tipo especial de estado quântico, um estado EPR  $|\Psi\rangle$ , e possíveis inferências experimentais que sejam feitas sobre  $|\Psi\rangle$  mostram que a mecânica quântica não consegue dar conta dos elementos de realidade existentes para o sistema descrito por  $|\Psi\rangle$ .

Em linhas bem gerais, a lógica EPR segue o seguinte raciocínio (todas as idéias em [10] serão descritas em muito mais detalhes no Cap. 6). Chamamos de grandezas incompatí-

veis, digamos  $A$  e  $B$ , aquelas cujos observáveis (ou operadores Hermetianos) associados não comutam:  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ . A mecânica quântica prevê que não podemos determinar simultaneamente o valor de grandezas incompatíveis para um mesmo sistema. Assumindo as previsões da mecânica quântica como corretas, os autores elaboram um experimento mental utilizando um estado emaranhado, e argumentam que, ao exigir localidade, podemos designar o valor de duas grandezas incompatíveis simultaneamente para uma das partes deste estado, do que deduzem que a mecânica quântica é uma teoria incompleta (pois ela veta o conhecimento simultâneo de tais grandezas).

Iremos construir aqui o argumento EPR conforme feito por Bohm e Aharonov [44]. Consideremos um sistema constituído de dois átomos, cada um de spin  $1/2$ , e com spin total 0. O estado do sistema pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle), \quad (2.19)$$

onde  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são autovetores na base do operador  $\sigma_z$  (operador de Pauli de spin  $1/2$  na direção  $\hat{z}$ ). Os índices  $A$  e  $B$  designam as partes do sistema, efetivamente os átomos  $A$  e  $B$ . Note que a princípio os átomos podem ser separados espacialmente, e ainda assim terem o estado global de spin sendo descrito por (2.19).

Se fizermos uma medição no subsistema  $A$ , este colapsará em um dos autovetores  $|0_A\rangle$  ou  $|1_A\rangle$ , e consequentemente, o subsistema  $B$  colapsará em um dos autovetores  $|1_B\rangle$  ou  $|0_B\rangle$ , respectivamente. Como após a medição saberemos com certeza qual o valor de spin para  $B$ ,  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ , então o spin na direção  $\hat{z}$  é um elemento de realidade de  $B$ . Fundamental aqui é o fato de que, segundo EPR, tal inferência foi feita sem interferir com o subsistema  $B$  (condição de localidade).

Podemos também escrever o mesmo estado inicial  $|\psi\rangle$  de nossos átomos na base de  $\sigma_x$  (operador de Pauli de spin  $1/2$  na direção  $\hat{x}$ ) designados por  $|-\rangle$  e  $|+\rangle$ , obtendo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-_A +_B\rangle - |+_A -_B\rangle). \quad (2.20)$$

Agora, uma medição no subsistema  $A$  faz com que este colapse em um dos autoestados  $|+_A\rangle$  ou  $|-_A\rangle$ , e consequentemente, o subsistema  $B$  colapse para  $|+_B\rangle$  ou  $|-_B\rangle$  (de autovalores  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ ). Neste caso, o spin no eixo  $\hat{x}$  do subsistema  $B$  também seria um elemento de realidade, novamente tendo sido inferido sem nenhuma perturbação à  $B$ .

Central aqui é que se nada é feito em  $B$ , independente se escolhemos determinar  $\sigma_z$  ou  $\sigma_x$  para  $A$ , a princípio  $B$  deveria ser o mesmo tanto ao final de um como de outro processo de medição (salientamos apenas que esta é uma maneira de enxergar o problema sob o ponto de vista EPR, não significando que esta é a interpretação vigente em mecânica quântica). Logo, um mesmo subsistema poderia ter elementos de realidade associados ao valores de spin em  $\hat{z}$  e em  $\hat{x}$ . Mas as observáveis  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$  são incompatíveis, dado que  $[\sigma_z, \sigma_x] \neq 0$ , e então as regras da mecânica quântica impõem a impossibilidade de sabermos simultaneamente seus valores para  $B$ . Chegamos assim a uma contradição. O estado EPR dado por (2.19) ou por (2.20) não permitem sabermos  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$  ao mesmo



tempo, mas um experimento que não interfere com  $B$  possibilita associar elementos de realidade tanto para  $\sigma_z$  quanto para  $\sigma_x$ . Dessa maneira, EPR conclui que a mecânica quântica é incompleta, uma vez que a teoria não consegue identificar todos os elementos de realidade do sistema tratado.

No capítulo 6 voltaremos ao presente debate. Lá discutiremos nossa solução a este aparente conflito. Diferente de todas as críticas feitas às conclusões EPR, em sua imensa maioria apontando falhas tanto na idéia de interação e localidade em EPR (ver a seguir), quanto no conceito adotado para definir “elemento de realidade”, mostraremos que são certas correlações que o formalismo da mecânica quântica impõe aos estados EPR que fazem com que a lógica em [10] apresente uma importante lacuna. Nossos cálculos – baseados na estrutura matemática básica da mecânica quântica – mostram que o que se determina para o sistema  $A$  naturalmente restringe o que se pode saber sobre  $B$ . Logo, são correlações quânticas que garantem a autoconsistência dos resultados de medições sobre estados EPR. Assim, concluímos que a mecânica quântica não é incompleta, ao menos não pelas justificativas dadas por EPR.

### 2.2.3 Correlações quânticas, desigualdades de Bell e o teste CHSH

Do discutido acima, basicamente EPR pressupõe um universo local e realista. John S. Bell, em 1964, formaliza essa visão de mundo em um modelo local de variáveis ocultas (LHVM, na sigla em inglês) [14]. Tal modelo assume que [23]:

- Resultados de medições são determinados por propriedades que os sistemas possuem antes, e independentemente, da medição.
- Resultados obtidos em um local são independentes de quaisquer ações feitas a uma separação do tipo espaço.
- A preparação do aparato local é independente das variáveis ocultas que determinam os resultados locais.

Bell elabora então um conjunto de desigualdades, envolvendo correlações estatísticas de sistemas bipartidos (ou seja, compostos por dois subsistemas, digamos partículas  $A$  e  $B$ ), que devem ser respeitadas por teorias locais de variáveis ocultas. Ao verificar que certos estados emaranhados violam as suas desigualdades, Bell conclui que teorias LHVM são incompatíveis com previsões estatísticas da mecânica quântica.

Experimentos que testem tais desigualdades, na forma proposta por Bell, não são de fácil implementação experimental. Assim, a partir das idéias originais, Clauser *et al.* [15] derivaram uma desigualdade envolvendo correlações de medições em um sistema bipartido que fornecia um meio mais direto de testar a hipótese LHVM em laboratório. Essa desigualdade é nomeada CHSH (Clauser, Horne, Shimony e Holt). A seguir, apresentaremos a dedução dessa desigualdade conforme aparece em [45].

#### Desigualdade CHSH

A figura 2.1 representa um experimento com um emissor de fótons (correlacionados e emitidos em direções opostas) e dois detectores. Os fótons podem ser detectados em duas orientações diferentes,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  pelo detector A, e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  pelo detector B (ver figura 2.2). Mas dada uma certa direção, ao longo da mesma o estado de polarização de um fóton só pode ser +1 ou -1 (em total analogia com spin 1/2 discutido anteriormente).

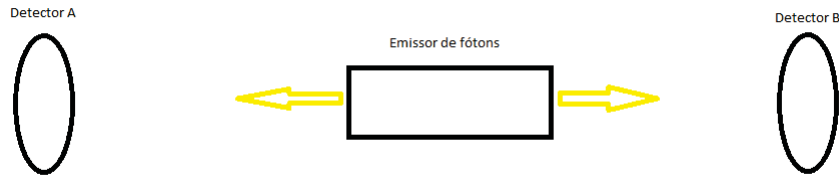


Figura 2.1: Representação de uma fonte emitindo fótons correlacionados na direção de dois detectores, que podem então medir as polarizações dos mesmos.



Figura 2.2: Representação das direções de polarização que podem ser mensuradas pelos detectores:  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  por A e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  por B.

Após a detecção, os valores são comparados e um coeficiente de correlação entre as medições pode ser determinado. Vamos derivar esse coeficiente assumindo que nossos sistemas sejam clássicos, respeitem localidade e estejam associados a variáveis ocultas. O fato de nossos fótons respeitarem localidade significa que após saírem do emissor, não há mais como ações em um deles interferir no outro. Já a presença de variáveis ocultas implica que há aspectos significativos na descrição dos estados dos fótons que não são contemplados por nossa teoria.

Vamos designar por  $\lambda$  as variáveis que descrevem os aspectos desconhecidos dos fótons. Assumindo que fótons são produzidos na fonte com determinados valores de  $\lambda$  e com uma densidade de probabilidade  $\rho(\lambda)$ , teremos

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1, \quad \rho(\lambda) \geq 0. \quad (2.21)$$

Em um universo clássico, dados  $\lambda$  e um ângulo de medição  $\delta$ , poderíamos determinar a polarização que seria observada nos detectores. Assim, existe uma função de  $\lambda$  e  $\delta$  com

valores  $+1$  e  $-1$ , de forma que, para os ângulos  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dos nossos detectores, teremos

$$S_A^\lambda(\delta_1) = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}, \quad S_B^\lambda(\delta_2) = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}, \quad (2.22)$$

onde  $\left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$  representa os valores possíveis de  $S$ .

Com isso podemos montar o coeficiente de correlação clássica como

$$\epsilon^{Cl}(\delta_1, \delta_2) \equiv \int \rho(\lambda) S_A^\lambda(\delta_1) S_B^\lambda(\delta_2) d\lambda. \quad (2.23)$$

O fato de que a correlação é expressa como o produto de duas funções  $S_A^\lambda(\delta_1)$  e  $S_B^\lambda(\delta_2)$  expressa localidade. A correlação do sistema vem das variáveis ocultas  $\lambda$ , que podiam ser compartilhadas quando ainda havia interação entre os subsistemas (por exemplo, durante o processo de emissão).

Vamos construir uma expressão utilizando as funções  $S^\lambda(\delta)$  tanto para o detector A, com ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , quanto para o detector B, com ângulos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Seja

$$\{S_A^\lambda(\alpha_2) [S_B^\lambda(\beta_1) + S_B^\lambda(\beta_2)] + S_A^\lambda(\alpha_1) [S_B^\lambda(\beta_1) - S_B^\lambda(\beta_2)]\} = \{\dots\}. \quad (2.24)$$

Note que  $\dots$  pode valer apenas  $+2$  ou  $-2$  (uma vez que cada  $S$  é  $\pm 1$ ), de modo que

$$|\{\dots\}| = 2. \quad (2.25)$$

Assim, utilizando a equação (2.21), podemos afirmar

$$\left| \int \rho(\lambda) \{\dots\} d\lambda \right| \leq \int \rho(\lambda) |\{\dots\}| d\lambda = 2 \int \rho(\lambda) d\lambda = 2. \quad (2.26)$$

Dessa forma, chegamos à desigualdade CHSH. Para coeficientes de correlação clássicos  $\epsilon^{Cl}(\delta_1, \delta_2)$ , temos

$$S \equiv |\epsilon^{Cl}(\alpha_2, \beta_1) + \epsilon^{Cl}(\alpha_2, \beta_2) + \epsilon^{Cl}(\alpha_1, \beta_1) - \epsilon^{Cl}(\alpha_1, \beta_2)| \leq 2. \quad (2.27)$$

Vamos agora calcular a expressão (2.27) considerando as previsões da mecânica quântica. Neste caso, os coeficientes de correlação entre as polarizações serão dados por (onde o eixo suporte da direção de propagação dos fótons é assumido  $z$ , logo os mesmos terão suas polarizações no plano  $x$ - $y$ )

$$\epsilon^{AB}(\alpha, \beta) \equiv \langle \Phi | E^A(\alpha) \otimes E^B(\beta) | \Phi \rangle. \quad (2.28)$$

Aqui  $|\Phi\rangle$  representa o estado dos fótons emitidos e  $E(\delta)$  é o operador de medição de

polarização dos fótons. Os operadores são dados por

$$\begin{aligned} E^A(\alpha) &= |x^\alpha\rangle\langle x^\alpha| - |y^\alpha\rangle\langle y^\alpha|, \\ E^B(\beta) &= |x^\beta\rangle\langle x^\beta| - |y^\beta\rangle\langle y^\beta|, \end{aligned} \quad (2.29)$$

com

$$\begin{aligned} |x^\alpha\rangle &= \cos(\alpha)|x\rangle + \sin(\alpha)|y\rangle, \\ |y^\alpha\rangle &= -\sin(\alpha)|x\rangle + \cos(\alpha)|y\rangle, \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  autovetores de polarização associados aos eixos  $x$  e  $y$ .

Trataremos de um arranjo experimental em que os fótons emitidos são descritos pelo estado

$$|\Phi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|xx\rangle + |yy\rangle). \quad (2.31)$$

Substituindo o estado (2.31) na equação (2.28), é um exercício algébrico simples mostrar que

$$\epsilon^{AB} = \cos[2(\beta - \alpha)]. \quad (2.32)$$

Podemos agora calcular  $S$ , usando (2.32) em (2.27), para uma determinada configuração de detectores. Utilizaremos  $\alpha_1 = \pi/8$ ,  $\beta_1 = \pi/4$ ,  $\alpha_2 = 3\pi/8$  e  $\beta_2 = \pi$ . Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon^{AB}(\alpha_1, \beta_1) &= \epsilon^{AB}(\alpha_2, \beta_1) = \epsilon^{AB}(\alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \epsilon^{AB}(\alpha_1, \beta_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Destes resultados, temos que  $S$  quântico fornece  $2\sqrt{2}$ , em confronto com o cálculo clássico.

Desta forma, somos levados à conclusão de que a mecânica quântica viola a desigualdade CHSH, e possui características que não podem ser adequadamente descritas por teorias locais de variáveis ocultas. Posteriormente, foi demonstrado que o valor máximo possível de ser atingido por um sistema quântico é justamente  $2\sqrt{2}$  [46].

Experimentos para testar as desigualdades de Bell (grupo da qual a desigualdade CHSH faz parte) começaram a ser feitos na década de 80, sendo o primeiro desses experimentos realizado por Aspect *et al.* [16]. Seguiram-se diversos outros [17–21], todos violando as desigualdades de Bell e, portanto, demonstrando que os sistemas físicos testados não podiam ser representados por modelos locais de variáveis ocultas. Entretanto, todos esses experimentos ainda possuíam *loopholes* (ou seja, brechas), o que deixava certa margem para questionamentos de suas conclusões [47–50]. Como exemplo, citamos o problema de comunicação, que aparece quando os dispositivos não estão suficientemente distantes, e um sinal possa ser transmitido entre eles no meio tempo em que são feitas,

quase simultaneamente, as duas medições. Experimentos mais recentes eliminam esta e outras brechas. Como exemplos, citamos o trabalho de Hensen *et al* [51], que mede o spin de dois elétrons separados por 1,3 quilômetros, obtendo para a desigualdade CHSH  $S = 2,42 \pm 0,20$ , e o trabalho de Rosenfeld *et al* [52], que utiliza o spin de dois átomos de Rubídio separados por 398 metros e obtém  $S = 2,221 \pm 0,033$ , ambos os experimentos obtendo  $S > 2$  e portanto negando a possibilidade da descrição dos eventos físicos por um modelo LHVM.

## 2.3 Emaranhamento

Na seção anterior discutimos e exemplificamos a constatação teórica e experimental de que existem correlações em sistemas quânticos que não podem ser explicadas a partir de concepções clássicas sobre a natureza. Por exemplo, teorias locais não são capazes de descrever os resultados estatísticos observados em diferentes tipos de medições. O termo “emaranhamento” (do alemão, *Verschränkung*), foi cunhado por Schrödinger [11] em resposta ao artigo EPR, para designar esse tipo de correlação, a qual Einstein chamava de “*spooky action at a distance*” (fantasmagórica ação à distância). No que se segue, iremos nos ater em muito mais detalhes a esse conceito, uma das mais relevantes correlações encontradas no mundo quântico e que não possui nenhuma associação com fenômenos clássicos (e já considerado na Seção 2.1).

### 2.3.1 Aspectos Gerais

O espaço de Hilbert descrevendo um sistema composto com  $N$  “partes” (por exemplo,  $N$  partículas), é dado pelo produto tensorial dos espaços de cada um dos subsistemas, ou seja,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ . Um vetor de estado representando esse sistema é genericamente escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} c_{i_1 i_2 \dots i_N} |i_1 i_2 \dots i_N\rangle. \quad (2.34)$$

Aqui, o índice  $i_n$  associa um certo número quântico (indicando alguma quantidade física pertinente) ao subsistema  $n$ . Os  $c$ 's são números complexos tais que  $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} |c_{i_1 i_2 \dots i_N}|^2 = 1$ .

O estado geral dado por (2.34) caracteriza completamente o sistema, mas não necessariamente descreve cada uma de suas partes de forma individual (isto é, independente do conjunto). Para que isto seja verdade — para que cada subsistema tenha uma identidade física própria — precisamos ter que

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (2.35)$$

ou seja,  $|\psi\rangle$  é a multiplicação tensorial de estados que descrevem cada um dos subsistemas em separado.

Chamamos um estado puro dado na forma (2.35) de separável. Nesse caso, a especificação de cada um dos subsistemas é independente dos demais e ações realizadas em apenas um deles não deverá afetar os outros. Para estados puros (o mesmo se dando para estados mistos), a separabilidade coincide com o conceito de o estado ser não emaranhado, e dessa forma, definimos um estado puro como emaranhado quando não pudermos escrevê-lo como a simples multiplicação tensorial de estados de seus subsistemas, ou seja,  $|\psi\rangle$  é diferente da forma funcional apresentada em (2.35). Um exemplo de estado emaranhado é o estado de Bell definido por  $|\psi_{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ . Temos que  $|\psi_{Bell}\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  para quaisquer estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  descrevendo as partes do estado global.

Os conceitos de emaranhamento e não-localidade (sistemas não-locais são aqueles que violam as desigualdades de Bell) foram considerados equivalentes por muito tempo. Werner [22], entretanto, mostrou que os dois nem sempre coincidem. Para isto, ele estendeu a definição de emaranhamento para sistemas mistos, assim distinguindo correlação clássica de não clássica.

Primeiro, Werner notou que estados descritos como a soma convexa de estados produto possuem apenas correlações clássicas. Estados dessa forma são escritos como

$$\rho_{sep} = \sum_r p_r \rho_r^1 \otimes \rho_r^2 \otimes \dots \otimes \rho_r^n, \quad (2.36)$$

onde  $p_r \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq p_r \leq 1$  e  $\sum_r p_r = 1$ . Aqui  $\rho_r^i$  descreve o  $i$ -ésimo subsistema de um sistema de  $n$  partes. O argumento é que estados do tipo  $\rho_r^1 \otimes \rho_r^2 \otimes \dots \otimes \rho_r^n$  não são correlacionados, dado que podem ser gerados segundo uma distribuição de probabilidades  $\{p_r\}$  de maneira puramente clássica, dando origem ao estado  $\rho_{sep}$  descrito acima.

Segundo, Werner argumentou que estados emaranhados podem ser definidos como aqueles impossíveis de serem construídos a partir de operações locais e comunicação clássica – LOCC na sigla em inglês (conceito este que é discutido com mais detalhes no Apêndice A). Mas o operador densidade na Eq. (2.36) a princípio pode ser gerado dessa forma, uma vez que descreve uma distribuição clássica de estados separáveis  $\rho_r^1 \otimes \rho_r^2 \otimes \dots \otimes \rho_r^n$ . Portanto, matematicamente, Werner propôs considerar estados emaranhados como estados não representados por uma soma convexa de estados, em outras palavras, que não possam ser escritos como na Eq. (2.36).

Por último, Werner demonstrou que embora qualquer estado que viole alguma das desigualdades de Bell seja emaranhado, há estados que não violam essas desigualdades e ainda assim apresentam correlações quânticas. Dessa maneira, os conceitos de emaranhamento e não-localidade tornam-se independentes: há estados emaranhados que podem ser descritos por teorias locais. Tais resultados corroboram então a definição dada por Werner para um sistema ser emaranhado. Por fim, Masanes *et al.* [53] definem estados emaranhados como aqueles não simuláveis através de correlações clássicas.

### 2.3.2 Condições necessárias usualmente assumidas para a quantificação de emaranhamento

Um dos tópicos mais relevantes com relação a emaranhamento é justamente sua quantificação. A idéia é associar um número real não negativo a um estado  $|\psi\rangle$ , de tal forma que esta quantidade possa nos dizer concretamente o quão emaranhado é  $|\psi\rangle$ . Há uma vasta literatura no assunto (em particular, boas introduções sendo [23, 54]), onde diferentes propostas de medidas de emaranhamento e análises sobre os requisitos mínimos desejáveis são discutidas em profundidade.

Na presente tese não iremos apresentar em grande detalhes todas as condições e restrições que podem ser assumidas para caracterizar uma medida de emaranhamento. Entretanto, a seguir iremos listar algumas das mais relevantes, destacando principalmente seus aspectos conceituais.

#### (a) *Monotonicidade sob LOCC*

Como dito anteriormente, designamos como LOCC a situação em que distintos agentes podem analisar partes de um sistema, cada uma tendo acesso apenas ao seu subsistema para observações e operações locais. Os resultados obtidos em cada subsistema podem ser comunicados entre todos os agentes (e usados como guias para novas manipulações locais). É natural então determinarmos, dentro de tal escopo, como emaranhamento seria ou não afetado por esses processos. Seguindo esse raciocínio, Vidal [55] argumenta que uma quantificação adequada de emaranhamento deveria medir como mudanças num estado global advindas de LOCC alterariam sua “quantidade” de emaranhamento. Também deveria ser capaz de identificar que recursos não-locais (ou seja, aqueles não gerados por LOCC, portanto de origem puramente quântica) estariam presentes no estado analisado. Sabendo que recursos não-locais tendem a se degradar sob LOCC, Vidal propõe como critério para medidas de emaranhamento que estas sejam monotônicas sob LOCC (não aumentem, na média, sob a ação de LOCC). Tal imposição está em consonância com a definição de emaranhamento de Werner, que coloca estados emaranhados como aqueles que não podem ser gerados utilizando-se LOCC. Vidal determina então quais são as condições matemáticas para que uma grandeza  $\mu$  seja monotônica (não-crescente) sob LOCC.

#### (b) $\mu$ como uma função positiva-definida

Uma condição que não é independente da acima, mas merece particular destaque é sobre quais valores  $\mu$  pode assumir. De forma bastante resumida, as condições formais necessárias e suficientes para que uma função  $\mu$  seja monotônica sob LOCC são descritas no Apêndice A. Entre outras consequências, elas garantem que

$$\mu(\rho) \geq 0. \quad (2.37)$$

Além disso, implicam que estados separáveis possuem um valor  $\mu$  constante,  $\mu_0$ , que corresponde ao valor mínimo de  $\mu$ . Isso acontece devido ao fato de que estados separáveis



podem ser convertidos reversivelmente uns nos outros via LOCC, e também porque qualquer sistema pode terminar como um estado separável através das ações apropriadas dos agentes em seus subsistemas. Assim, podemos tomar  $\mu_0 = 0$  sem perda de generalidade, e escrever

$$\mu(\rho_{sep}) = 0, \quad (2.38)$$

para  $\rho_{sep}$  indicando um estado separável (ver, por exemplo, Eq. (2.36)).

Para um estado puro  $|\psi\rangle$  temos de forma equivalente  $\mu(|\psi\rangle) \geq 0$ , com a igualdade ocorrendo se  $|\psi\rangle$  é dada pela Eq. (2.35).

(c) *Invariância por mudança de base*

Algumas propriedades de um estado quântico devem ser independentes da base usada para representá-lo. Em uma determinada medição, entretanto, os resultados dependerão da quantidade inferida. Desta forma, certas correlações quânticas podem surgir (ver por exemplo, Seção 2.3 sobre CHSH) em função da forma particular que o aparato experimental interage com o sistema, e portanto, das projeções (dependentes de base) associadas à observável analisada e ao processo de medição. Para medidas de emaranhamento, espera-se que mudanças de bases locais não alterem o valor da medida. Sabendo-se que no formalismo quântico uma mudança de base é sempre implementada por um operador unitário  $\hat{U}$  (ou seja,  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = I$ ), então usualmente exige-se que:

$$\mu(\rho) = \mu(\hat{U}\rho\hat{U}^\dagger), \quad (2.39)$$

onde  $\hat{U}$  é um operador local que age apenas sobre uma das partes do estado.

Para um estado puro  $|\psi\rangle$ , de forma semelhante  $\mu(|\psi\rangle) = \mu(\hat{U}|\psi\rangle)$ .

(d) *Estados parciais e estados auxiliares*

Uma vez que um sistema quântico  $\rho$  pode ser descrito como a composição de vários subsistemas, podemos muitas vezes tanto querer estender o sistema original, adicionando novas “partes” à  $\rho$ , quanto podemos querer eliminar ou simplificar um ou mais de seus subsistemas constituintes. Se adicionarmos à  $\rho$  subsistemas sem informação nova, ou com informação redundante, as chamadas ancilas  $Q$  (qubits relevantes para registrar certos aspectos do estado inicial, mas que não entram diretamente em nenhuma evolução quântica posterior), o emaranhamento original não deveria mudar. Por outro lado, ao eliminarmos parte da informação sobre um estado quântico (em geral tomando-se o traço sobre certos graus de liberdade do sistema, ou seja, sobre certos subsistemas) não deveríamos ter o emaranhamento aumentando para o estado resultante. Destas considerações, temos que:

$$\mu(\rho) = \mu(\rho \otimes \rho_Q), \quad (2.40)$$

sendo  $\rho_Q$  qualquer estado de uma ancila local  $Q$ , e

$$\mu(\rho) \geq \mu(\text{Tr}_{\bar{P}}[\rho]), \quad (2.41)$$

com qualquer parte local  $\tilde{P}$  do sistema.

(e) *Crêterios propostos por Dagmar Bruss*

Em um trabalho relativamente influente, D. Bruss [56] em 2002 propos uma série de condições a serem obedecidas pela função  $\mu$ . Algumas são os cr terios já discutidos acima, as demais podem ser resumidos pelas propriedades a seguir.

- *Normalização*: o emaranhamento de um estado maximamente emaranhado, formado por dois sistemas de dimensão  $d$ , deve ser dado por  $\ln[d]$ .
- *Continuidade*: Para duas matrizes densidade  $\rho$  e  $\sigma$ ,

$$|\mu(\rho) - \mu(\sigma)| \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad \|\rho - \sigma\| \rightarrow 0. \quad (2.42)$$

- *Aditividade*: Um número  $n$  de cópias idênticas de um estado  $\rho$  deve possuir  $n$  vezes o emaranhamento de uma única cópia,

$$\mu(\rho^N) = N \mu(\rho). \quad (2.43)$$

- *Subaditividade*: O emaranhamento do produto tensorial de dois estados  $\rho$  e  $\sigma$  não deve ser maior do que a soma do emaranhamento de cada um dos estados,

$$\mu(\rho \otimes \sigma) \leq \mu(\rho) + \mu(\sigma). \quad (2.44)$$

- *Convexidade*: A medida de emaranhamento deve ser uma função convexa, isto é,

$$\mu(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda\mu(\rho) + (1 - \lambda)\mu(\sigma). \quad (2.45)$$

### 2.3.3 Algumas medidas de emaranhamento

Das discussões acima temos que, apesar de existirem propostas claras de como uma medida de emaranhamento deva se comportar, não há na literatura uma fórmula fechada única (universalmente aceita) para a função  $\mu$ . Na verdade, podemos encontrar diversas formas, apresentando distintas vantagens teóricas e práticas. A seguir iremos destacar algumas destas medidas, com interesse direto em nosso trabalho.

Para melhor clareza de not   o, ao invés de usarmos um símbolo genérico, em cada caso usaremos uma diferente not   o para a medida de emaranhamento  $\mu$ .

#### 2.3.3.0 Entropia de von Neumann de estado reduzido

Uma das medidas mais utilizadas para sistemas puros, a entropia de von Neumann, foi introduzida como medida de emaranhamento por Bennett et al.[57], sendo extensivamente utilizada [58–64]. Mede nossa falta de informação sobre os subsistemas que compõe o sistema total. Para um sistema formado pelas partes ou subsistemas A e B, considere a

quantidade

$$S_E(\rho) = -\text{Tr}[\rho^A \log_2 \rho^A], \quad (2.46)$$

sendo  $\rho^A \equiv \text{Tr}_B[\rho]$  o operador densidade reduzido do sistema. Define-se  $S_E$  como a entropia de emaranhamento do sistema  $\rho$ . Também pode ser calculada como

$$S_E(\rho) = -\sum_{\lambda} \lambda \log_2 \lambda, \quad (2.47)$$

onde  $\lambda$  são os autovalores da matriz do operador densidade reduzido de uma das partes do sistema.

A entropia de emaranhamento é monotônica sob LOCC e também satisfaz os critérios estabelecidos por Bruss [56] (ver Seção anterior).

### 2.3.3.0 Entropia Linear

A entropia linear foi sugerida como medida de informação para estados globais puros por Fano [65] e subsequentemente desenvolvida por outros autores [40, 66, 67] (tendo ampla aplicação na literature [68–73]). É definida como

$$SL(\rho_A) = 1 - \text{Tr}[\rho_A^2], \quad (2.48)$$

onde  $A$  representa uma partição do estado. Seu valor varia entre 0 e  $1 - 1/d$  (o valor máximo é atingido por um estado maximamente emaranhado com espaço de Hilbert de dimensão  $d$ ).

### 2.3.3.0 Emaranhamento como medida de distância

Definida pelos autores em [74], esta medida aplica-se para estados puros com qualquer dimensão [75–79]. Dados dois estados,  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle$  e  $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^n d_i |i\rangle$  (onde os  $|i\rangle$ 's representam vetores em espaços de Hilbert com mais de uma parte), podemos definir a distância entre eles como:

$$D(\psi, \phi) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|c_i - d_i\|^2}. \quad (2.49)$$

Dado um estado  $|\psi\rangle$  qualquer, podemos medir seu emaranhamento encontrando o estado  $|\phi\rangle$  não emaranhado que minimize a distância  $D$ . A ideia aqui é que quanto mais distante um estado esteja de um não emaranhado, mais emaranhado será. Desse modo, a medida de emaranhamento é dada por:

$$D(\psi) = D(\psi, \phi_{min}) \quad (2.50)$$

O emaranhamento por distância é obviamente zero para estados separáveis. Por ser definido como uma métrica Euclidiana, é também naturalmente independente por mudanças de base locais.

2.3.3.0 Medida  $Q$ 

A medida  $Q$  é definida para sistemas puros [80], aplicável a sistemas com  $N$  partes de dimensão  $d = 2$  [81–85] (ou seja, “bits” quânticos, os “qubits”).  $Q$  se anula para estados separáveis e é independente de mudanças locais de base.

Para sua construção, considere do espaço de Hilbert  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$  de  $N$  qubits. Tal espaço possui uma base com  $2^N$  vetores, cada um sendo identificado por uma sequência de  $N$  “bits”:  $|b_1 \dots b_N\rangle$ , com  $b_j \in \{0, 1\}$ . Para  $b \in \{0, 1\}$ , definimos (onde  $\hat{\phantom{x}}$  denota ausência)

$$i_j(b)|b_1 \dots b_N\rangle = \delta_{bb_j}|b_1 \dots \hat{b}_j \dots b_N\rangle. \quad (2.51)$$

Notamos que  $i_j$  é um mapa  $\mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes N-1}$ .

Para  $u, v \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes N-1}$  escrevemos

$$u = \sum u_x |x\rangle, \quad v = \sum v_y |y\rangle, \quad (2.52)$$

onde  $x$  e  $y$  representam sequências de  $(N-1)$  “bits”, com  $0 \leq x, y \leq 2^{N-1}$ . Em seguida, definimos

$$D(u, v) = \sum_{x < y} |u_x v_y - u_y v_x|^2. \quad (2.53)$$

Por fim, para  $\Psi \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ , tomamos como medida de emaranhamento

$$Q(\psi) = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^N D(i_j(0)\psi, i_j(1)\psi), \quad (2.54)$$

onde  $4/N$  é um fator de normalização.

2.3.3.0 A relação entre  $Q$  e a entropia linear

Brennen [86] encontrou a seguinte relação entre  $Q$  e a entropia linear

$$Q(\psi) = 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Tr}[\rho_k^2] \right). \quad (2.55)$$

Na equação (2.55),  $Q$  aparece como a média da entropia linear entre cada parte e o resto do sistema. Como a entropia linear entre uma parte  $k$  e o sistema total representa quão emaranhado  $k$  e o sistema estão, fica claro o significado físico de  $Q$ : a média do emaranhamento de cada parte em relação ao sistema completo.

Tal conceito será bastante explorado no presente trabalho.

## 2.3.3.0 Generalização da entropia linear

Rigolin et al. [87] generalizaram a entropia linear. Ao invés de calculá-la levando em consideração apenas a divisão entre um subsistema e o sistema completo, eles estenderam tal construção, de modo a assumir partições com um maior número de subsistemas. Assim, pode-se fazer médias entre o sistema e tais partições ampliadas, constituídas por dois, três

ou mais subsistemas. Em outras palavras, mantém-se a ideia de uma média da entropia linear, mas diversifica-se as possibilidades de partições feitas no sistema.

De forma mais concreta, suponha um sistema  $P$  particionado em  $N$  subsistemas  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Seja  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  um estado quântico descrevendo  $P$  (aqui  $\mathcal{H}$  é o espaço de Hilbert do sistema). Dado que temos  $N$  subsistemas,  $\mathcal{H} = H_1 \otimes \dots \otimes H_N = \otimes_{i=1}^N H_i$ , sendo  $H_i$  o espaço de Hilbert associado a  $P_i$ . O operador densidade do sistema é  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , e assim, definimos

$$R_E^{(n)}(\rho) = \frac{1}{T_{n-1}^{N-1}} \sum_{i_1=1}^{N-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{N-1} \sum_{i_3=i_2+1}^{N-1} \dots \sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{N-1} G(n, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}), \quad (2.56)$$

onde todos os parâmetros são números naturais,  $n < N$ , e

$$T_{n-1}^{N-1} = \frac{(N-1)!}{(N-n)!(n-1)!} \quad (2.57)$$

é a definição do coeficiente binomial. É importante notar que o somatório é feito sobre todos os  $i_k$ s, com a restrição de que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq N-1$ . Também toma-se que  $i_0 = 0$ . A função  $G$  é dada por

$$G(n, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}) = \frac{d}{d-1} \left[ 1 - \frac{1}{N-i_{n-1}} \sum_{j=1}^{N-i_{n-1}} \text{Tr}(\rho_{j,j+i_1,j+i_2,\dots,j+i_{n-1}}^2) \right], \quad (2.58)$$

onde  $\rho_{j,j+i_1,j+i_2,\dots,j+i_{n-1}}^2$  é obtido ao traçar-se todos os subsistemas, exceto  $P_A = \{P_j, P_{j+i_1}, P_{j+i_2}, \dots, P_{j+i_{n-1}}\}$  e  $d = \min\{\dim P_A, \dim \bar{P}_A\}$ . Aqui,  $\dim P_A$  e  $\dim \bar{P}_A$  são, respectivamente, a dimensão do espaço de Hilbert do subsistema  $P_A$  e de seu complemento  $\bar{P}_A$ .

## 2.4 Outras formas de correlações quânticas

O estudo da elaboração e compreensão de algoritmos quânticos está fortemente interligado ao estudo do emaranhamento. Computadores quânticos operando em estados puros precisam de emaranhamento para obter eficiência exponencial no tempo de computação em relação a computadores clássicos [88, 89]. O algoritmo de Shor [90] é um exemplo de algoritmo quântico que utiliza estados emaranhados para fatorar um número  $N$  não primo de  $L$  bits. O tempo de computação do algoritmo de Shor cresce polinomialmente com o número de bits, enquanto o melhor algoritmo clássico existente para fazer a mesma tarefa possui tempo de computação com crescimento exponencial.

Entretanto, a situação parece se tornar mais complexa quando estados mistos são levados em conta. Knill e Laflamme [91] propuseram um algoritmo utilizando estados mistos que resolve certos problemas para os quais não são conhecidos algoritmos clássicos. O interessante é que tais estados mistos podem apresentar emaranhamento nulo [92]. Esta descoberta deu impulso à procura por novas correlações quânticas, além do

emaranhamento. Entre elas citamos a Discórdia.

A Discórdia quântica foi apresentada por Zurek em 2000 (e independentemente por Henderson e Vedral em 2001 [93]) e é uma medida de correlações não clássicas entre sistemas quânticos [94, 95]. A Discórdia captura correlações que ocorrem devido a efeitos quânticos, mas não necessariamente envolvam emaranhamento. Na teoria de informação clássica, existem duas maneiras de se medir a informação mútua de dois subsistemas: (i) determinar o quão menor é a incerteza associada ao par, quando comparada com a soma das incertezas associadas aos subsistemas individualmente; (ii) determinar a informação média que se obtém sobre um subsistema quando o estado do outro é conhecido. Na verdade pode-se mostrar que (i) e (ii) são equivalentes (para a representação matemática desses conceitos e maiores detalhes conceituais, ver, por exemplo, [45]). Quando tratamos de sistemas quânticos, essas formas deixam de ser equivalentes, o que sugere que a diferença entre elas representa uma correlação puramente quântica. A partir dessa diferença, define-se a Discórdia como:

$$D_A(\rho) = S(\rho_A) - S(\rho) + \min_{\{\Pi_j^A\}} S(\rho_{B|\{\Pi_j^A\}}), \quad (2.59)$$

onde  $\rho$  representa um sistema quântico bipartido em dois subsistemas  $\rho_A$  e  $\rho_B$ ,  $S(\rho)$  é a entropia de von Neumann associada ao estado  $\rho$ ,  $\rho_{B|\{\Pi_j^A\}} = \text{Tr}_A(\Pi_j^A \rho)/p_j$  é a matriz densidade condicional,  $p_j = \text{Tr}(\Pi_j^A \rho)$  é a probabilidade do resultado  $j$  e  $\Pi_j^A$  é o projetor de von Neumann associado ao observável  $A$ .

Assim como resultados obtidos no estudo do emaranhamento estimularam o surgimento de outras medidas de correlação quântica, como a discórdia, os métodos utilizados no estudo de emaranhamento deram impulso e foram empregados em outras áreas de pesquisa dentro da mecânica quântica.

Por exemplo, da mesma forma que Vidal [55] estabelece que medidas de emaranhamento devam ser monotônicas sob ação de LOCC (operações locais e comunicação clássica), Baumgratz *et al* [41] propõem uma metodologia para se determinar coerência de estados quânticos, impondo que estas medidas deveriam ser monotônicas sob o que definem como operações incoerentes, ou seja, operações em que não se pode obter um estado coerente a partir de um incoerente. Os autores discutem também possíveis medidas que satisfariam as restrições propostas, como a *entropia relativa de coerência*. Para uma base específica (portanto um cálculo dependente de base), é dada por

$$Coer_{ent.rel.}(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho), \quad (2.60)$$

onde  $\rho$  representa um estado misto,  $\rho_{diag}$  o estado que se obtém ao se eliminar os elementos diagonais deste estado e  $S(\cdot)$  a entropia de von Neumann.

O procedimento acima – em que se efetua a subtração entre uma grandeza associada a um estado e essa mesma grandeza associada a uma modificação do estado original – será amplamente utilizada por nós no capítulo 5, onde construiremos uma quantidade para medir correlação quântica com tais características conceituais e matemáticas. Ao

fazermos isto, também obteremos uma grandeza que depende da base utilizada para se medir o sistema.

Outra grandeza monotônica sob operações incoerentes é a norma de coerência, dada por

$$Coer_{l_1}(\rho) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |\rho_{i,j}|, \quad (2.61)$$

onde  $\rho_{i,j}$  representam elementos da matriz densidade  $\rho$ . É interessante notar que a norma de coerência não é uma norma Euclidiana, e sim uma norma  $L_1$ , também conhecida como norma modular ou Manhattan. Logo, não é invariante por mudanças de bases que representem rotações.

Dessa maneira, vemos que o estudo do emaranhamento além de possuir interesse dentro do seu próprio escopo, também produziu ferramentas matemáticas que foram adaptadas e aplicadas com sucesso a outras áreas dentro da mecânica quântica, levantando a questão extremamente relevante de como podemos caracterizar as diferentes possibilidades de correlações surgidas em sistemas quânticos.



## Uma medida simples para emaranhamento: medida $C$

Como mencionado no capítulo anterior, várias propostas de boas medidas de emaranhamento (ou seja, obedecendo a certos requerimentos básicos) existem na literatura, cada uma tendo maior ou menor vantagem para distintas aplicações. Em nosso trabalho de mestrado [43], para discutir diferentes questões sobre propriedades de emaranhamento, propusemos uma nova medida, a qual chamamos de medida  $C$ . Por suas características matemáticas particulares, a medida  $C$  mostrou-se bastante útil como um passo intermediário para algumas análises de correlações quânticas (não necessariamente do tipo emaranhamento) propostas na presente tese. Desta forma, neste capítulo iremos revisar os aspectos essenciais da medida  $C$ . Também é importante frisar que vários resultados aqui discutidos, não foram desenvolvidos em [43], logo sendo contribuições inéditas da presente tese.

### 3.1 Definição da medida $C$

A medida  $C$ , desenvolvida por nós em trabalho anterior [43], aplica-se a estados puros constituídos de qualquer número de partes, cada uma com espaço de Hilbert de qualquer dimensão. Sua construção é feita a partir da condição básica de que um estado não emaranhado (ou seja, separável) deveria ter o valor para  $C$  igual a zero e que para qualquer outro estado, necessariamente  $C > 0$ .

Nosso ponto de partida foi então assumir que quanto mais “distante” um estado  $|\psi\rangle$  está da condição de separabilidade, mais emaranhado deve ser o sistema. Desta forma, determinamos qual é essa condição de separabilidade para um certo  $|\psi\rangle$  e perguntamos o que é estar “distante” da mesma. A seguir, iremos detalhar o desenvolvimento da proposta.

Podemos escrever um estado puro de  $N$  partes como

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N} c_{i_1 i_2 \dots i_N} |i_1 i_2 \dots i_N\rangle, \quad (3.1)$$

onde  $c_{i_1 i_2 \dots i_N}$  são números complexos, com  $\sum |c_{i_1 i_2 \dots i_N}|^2 = 1$ , e sendo que a dimensão da

$n$ -ésima parte (ou  $n$ -ésimo subsistema), chamada  $P_n$ , será designada por  $d_n$ . Note então que  $i_n = 1, \dots, d_n$ . Dizemos que a parte  $P_n$  é separável do restante se pudermos escrever

$$|\psi\rangle = |\psi_{P_n}\rangle \otimes |\psi_{\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}, \dots, P_N\}}\rangle, \quad (3.2)$$

onde o estado  $|\psi_{P_n}\rangle$  descreve a parte  $P_n$  e o estado  $|\psi_{\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}, \dots, P_N\}}\rangle$  as partes  $\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}, \dots, P_N\}$ .

Podemos verificar [43] que a parte  $P_n$  será separável do resto do sistema se

$$c_{i_1 \dots i_n \dots i_N} c_{i'_1 \dots i'_n \dots i'_N} - c_{i_1 \dots i'_n \dots i_N} c_{i'_1 \dots i_n \dots i'_N} = 0, \quad (3.3)$$

para todos os  $i_n \neq i'_n$  e  $\{i_1, \dots, i_{n-1}, i_{n+1}, \dots, i_N\} \neq \{i'_1, \dots, i'_{n-1}, i'_{n+1}, \dots, i'_N\}$  possíveis. Por exemplo, para um estado de dois qubits, descrito por

$$|\psi_2\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle, \quad (3.4)$$

a equação (3.3) assume a forma simples

$$c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01} = 0. \quad (3.5)$$

Aqui, como o sistema é bipartido, garantir que um dos subsistemas é separável já garante que o sistema todo o é (portanto, as equações para garantir a separabilidade do primeiro e do segundo subsistema são iguais).

Como um caso um pouco mais complexo, vamos assumir um sistema de três qubits. Obviamente, o número de equações para garantir a separabilidade total do sistema é maior. De fato, sendo

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle = & c_{000}|000\rangle + c_{100}|100\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{001}|001\rangle \\ & + c_{110}|110\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{011}|011\rangle + c_{111}|111\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O primeiro qubit será separável se (ver Eq. (3.3) com  $n = 1$ )

- Índices  $i_1 = 0, i'_1 = 1, \{i_2, i_3\} = 0, 0$  e  $\{i'_2, i'_3\} = 1, 0$ :

$$c_{000}c_{110} - c_{100}c_{010} = 0. \quad (3.7)$$

- Índices  $i_1 = 0, i'_1 = 1, \{i_2, i_3\} = \{0, 0\}$  e  $\{i'_2, i'_3\} = \{0, 1\}$ :

$$c_{000}c_{101} - c_{100}c_{001} = 0. \quad (3.8)$$

- Índices  $i_1 = 0, i'_1 = 1, \{i_2, i_3\} = \{0, 0\}$  e  $\{i'_2, i'_3\} = \{1, 1\}$ :

$$c_{000}c_{111} - c_{100}c_{011} = 0. \quad (3.9)$$

- Índices  $i_1 = 0, i'_1 = 1, \{i_2, i_3\} = \{1, 0\}$  e  $\{i'_2, i'_3\} = \{0, 1\}$ :

$$c_{010}c_{101} - c_{101}c_{010} = 0. \quad (3.10)$$

- Índices  $i_1 = 0, i'_1 = 1, \{i_2, i_3\} = \{1, 0\}$  e  $\{i'_2, i'_3\} = \{1, 1\}$ :

$$c_{010}c_{111} - c_{111}c_{010} = 0. \quad (3.11)$$

- Índices  $i_1 = 0, i'_1 = 1, \{i_2, i_3\} = \{0, 1\}$  e  $\{i'_2, i'_3\} = \{1, 1\}$ :

$$c_{001}c_{111} - c_{111}c_{001} = 0. \quad (3.12)$$

As equações geradas caso façamos a troca de índices  $i_1 \leftrightarrow i'_1$  e  $\{i_2, i_3\} \leftrightarrow \{i'_2, i'_3\}$  foram omitidas por serem redundantes. Se as equações (3.7)-(3.12) forem verificadas simultaneamente, o primeiro qubit será separável do resto do sistema e portanto  $|\psi_3\rangle = |\psi_{P_1}\rangle \otimes |\psi_{\{P_2, P_3\}}\rangle$ . Podemos obter também as equações para que o segundo e terceiro subsistemas sejam separáveis como

- Para  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} c_{000}c_{110} - c_{010}c_{100} &= 0, \\ c_{000}c_{011} - c_{010}c_{001} &= 0, \\ c_{000}c_{111} - c_{010}c_{101} &= 0, \\ c_{001}c_{110} - c_{100}c_{011} &= 0, \\ c_{001}c_{111} - c_{101}c_{011} &= 0, \\ c_{100}c_{111} - c_{101}c_{110} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Para  $n = 3$ :

$$\begin{aligned} c_{000}c_{101} - c_{001}c_{100} &= 0, \\ c_{000}c_{011} - c_{001}c_{010} &= 0, \\ c_{000}c_{111} - c_{001}c_{110} &= 0, \\ c_{001}c_{110} - c_{100}c_{011} &= 0, \\ c_{001}c_{111} - c_{101}c_{110} &= 0, \\ c_{100}c_{111} - c_{101}c_{110} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Em resumo, se um determinado estado  $|\psi_3\rangle$ , dado pela Eq. (3.6), respeitar as equações (3.7)-(3.14), podemos afirmar que cada um de seus qubits pode ser escrito como um estado independente dos demais, e portanto, esse é um estado separável, isto é,  $|\psi_3\rangle = |\psi_{P_1}\rangle \otimes |\psi_{P_2}\rangle \otimes |\psi_{P_3}\rangle$ .

O procedimento acima pode ser generalizado para um sistema puro multipartido e com o espaço de Hilbert de cada  $P_n$  tendo qualquer dimensão. Logo temos uma condição para que um  $|\psi\rangle$  seja separável em termos de relações entre seus coeficientes de expansão (explicando o nome dado, medida  $C$ ). Combinações apropriadas dos coeficientes devem se anular.

Por outro lado, se as combinações mencionadas não se anularem, o sistema é emaranhado. Assim, o quanto mais distante o *conjunto* dessas expressões estiverem do valor nulo, poderíamos esperar um maior emaranhamento do sistema. É um pouco trabalhoso, mas factível [43], determinar todas as combinações de índices a serem usados na Eq. (3.3) de tal forma a garantir que um determinado  $|\psi\rangle_N$  dado pela Eq. (3.1) possa escrito como  $|\psi_N\rangle = |\psi_{P_1}\rangle \otimes |\psi_{P_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{P_N}\rangle$ . Tomando o módulo quadrado de cada uma das Eqs. (3.3) e somando-as, logicamente que para um  $|\psi_N\rangle$  não emaranhado, o resultado será zero. Desta forma, definimos nossa medida  $C$  como sendo dada por (com  $\mathcal{N}$  uma constante de normalização apropriada)

$$C = \mathcal{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i_n, i'_n} \sum_{I_{\hat{n}}, I'_{\hat{n}}} |c_{i_1 \dots i_n \dots i_N} c'_{i'_1 \dots i'_n \dots i'_N} - c_{i_1 \dots i'_n \dots i_N} c'_{i_1 \dots i_n \dots i'_N}|^2, \quad (3.15)$$

onde  $I_{\hat{n}}$  representa o conjunto de índices  $\{i_1, \dots, i_{n-1}, i_{n+1}, \dots, i_N\}$ , estando o índice  $i_n$  ausente. De forma a não computar termos redundantes, os termos gerados com os pares  $\{i_n, i'_n\}$  ou  $\{I_{\hat{n}}, I'_{\hat{n}}\}$  são contados apenas uma vez, independente da ordem dos índices. Para nossos estados puros de dois qubits, fazendo  $\mathcal{N} = 4$ , temos a medida de emaranhamento dada por  $C = 4 |c_{00}c_{11} - c_{10}c_{01}|^2$ .

Como  $C$  é baseada nos coeficientes de expansão em uma certa base, e tem exatamente o formato de uma norma Euclidiana, é intuitivo concluir que  $C$  é invariante por mudanças de bases locais do estado. Isto é demonstrado rigorosamente em [43].

## 3.2 Comparação entre $C$ e outras medidas

Dizemos que duas medidas de emaranhamento,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , produzem o mesmo ordenamento se as mesmas classificam da mesma forma estados com maior ou menor grau de emaranhado. Em outras palavras, considere dois estados arbitrários  $\rho$  e  $\sigma$ . Então se sempre que  $\mu_1(\rho) \geq \mu_1(\sigma)$  temos que  $\mu_2(\rho) \geq \mu_2(\sigma)$ , com o reverso também sendo verdade, concluimos que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  ordenam igual. Note que não precisamos que os  $\mu$ 's forneçam os mesmos valores e nem mesmo que suas derivadas (usando  $\rho$ 's arbitrariamente próximos) sejam iguais, apenas a relação de ordem deve ser respeitada.

Vamos comparar  $C$  com outras medidas, ou de forma mais concreta, com a entropia de von Neumann, a medida de distância e a de concorrência. As duas primeiras foram revisadas no capítulo anterior. A concorrência, foi definida por Hill e Wothers [96], e posteriormente generalizada por Wothers [97]. É dada por

$$Con(\rho) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}[\rho_A^2])}, \quad (3.16)$$

onde  $\rho$  representa um estado bipartido e  $\rho_A \equiv \text{Tr}_B[\rho]$  é o operador densidade reduzido do sistema.

Em [43], fizemos a comparação numérica entre  $C$  e as medidas acima para estados puros de dois qubits, três qubits e estados bipartidos com dimensão do espaço de Hilbert de cada parte igual a três. Verificamos que o ordenamento não era o mesmo entre as medidas citadas e nem entre  $C$  e tais medidas para sistemas que não fossem de dois qubits. Para ilustrar esse resultado, mostramos na Figura 3.1 a medida  $C$  e a medida da distância calculadas para  $|\psi\rangle$ 's formados por 3 subsistemas, cada um sendo um qubit. Ordenando os  $|\psi\rangle$ 's de acordo com  $C$ , a aplicação da medida de distância aos estados claramente mostra não haver um mesmo padrão monotônico de crescimento.

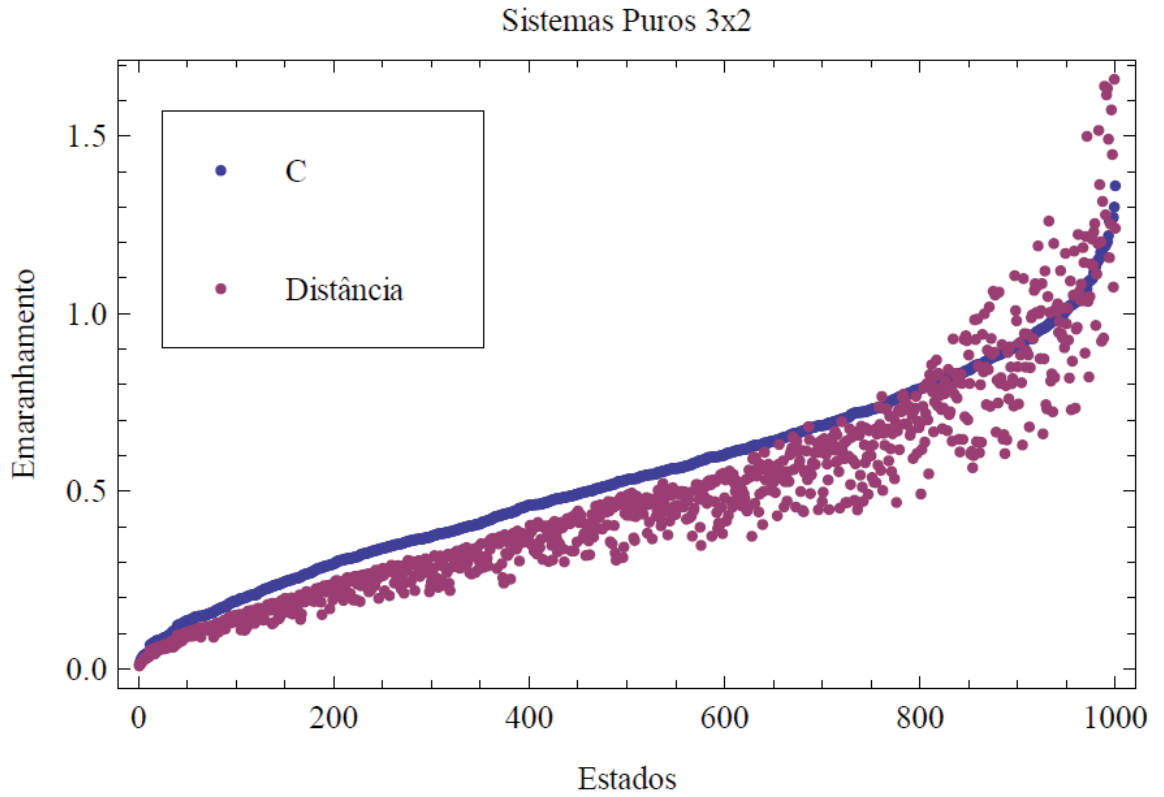


Figura 3.1: Figura retirada de [43]. A medida  $C$  e a medida de distância ( $D$ ) aplicadas a mil estados puros  $3 \times 2$  (tripartido, cada parte um qubit). Os estados são numerados de um a mil, de acordo com seu valor crescente de  $C$  (esses índices são apresentados no eixo horizontal).  $C$  e  $D$  são aplicadas a cada um dos estados, e seu valor apresentado no eixo vertical.

Por outro lado, as análises numéricas indicaram que o ordenamento de  $C$  é equivalente ao ordenamento de todas essas medidas quando os sistemas são constituídos por dois qubits. Na verdade, para sistemas puros de dois qubits, conseguimos encontrar analiticamente em [43] uma relação direta entre  $C$  e a entropia de von Neumann e a concorrência. De fato, provamos exatamente que [43]

$$S(|\psi\rangle_2) = -\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - C(|\psi\rangle_2)} \right) \log \left[ 1 - \sqrt{1 - C(|\psi\rangle_2)} \right], \quad (3.17)$$

$$Con(|\psi\rangle_2) = \sqrt{C(|\psi\rangle_2)}. \quad (3.18)$$

As funções (3.17) e (3.18) são crescentes em  $C$  (e como deveria ser, possuem mínimo igual a zero). Assim, temos que o ordenamento produzido por  $S(|\psi\rangle)$  e  $Con(|\psi\rangle)$  é o mesmo que o de  $C(|\psi\rangle)$  para estados puros de dois qubits.

Em [43] não conseguimos obter uma fórmula geral (isto é, para um sistema totalmente arbitrário de dois qubits) relacionando  $C$  e a medida da distância. Felizmente, em nosso trabalho de doutorado, fomos finalmente capazes de encontrar uma tal expressão, cuja derivação é bastante envolvente. Para não prejudicar a continuidade e fluidez de leitura do presente capítulo, deixamos a prova de tal expressão para sua última seção, apenas adiantando que é dada por (aqui  $C$  foi apropriadamente normalizada, ver Sec. 3.4).

$$D = 2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - C^2}}. \quad (3.19)$$

Note que  $D = 0$  para  $C = 0$  e que  $D$  é crescente com  $C$ .

### 3.3 $C$ como generalização de certos resultados na literatura

Como discutido na Seção 2.3.3, a medida  $Q$  é definida para estados de  $N$  partes, cada uma sendo um qubit. Ao aplicarmos a expressão geral para  $C$ , Eq. (5.16), para um sistema descrito por

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N=0}^{i_1, \dots, i_N=1} c_{i_1, \dots, i_N} |i_1 \dots i_N\rangle, \quad (3.20)$$

obtemos [43] a fórmula dada na Eq. (2.54), que é exatamente a medida  $Q$ . Logo, fica claro que  $C$  generaliza a medida  $Q$ , criada por Meyer e Wallach em 2002 (e cujo interesse estava voltado para informação quântica).

Um ano após a proposta de  $Q$ , Brennen [86] mostra que para  $N$  qubits, o cálculo da média da entropia linear de tal estado é totalmente equivalente à  $Q$ . Como a medida  $C$  é definida para  $N$  subsistemas arbitrários, estendendo  $Q$ , então é possível mostrar [43] que os mesmos argumentos de Brennen levam à equivalência entre  $C$  e a média da entropia linear no caso geral. Portanto, temos que

$$C(|\psi\rangle) = 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \text{tr}[\rho_j^2] \right), \quad (3.21)$$

que é exatamente a Eq. (2.55), mas só que aqui válida para um sistema multipartido com qualquer dimensão contável para os subsistemas. Note então que  $C$  pode ser entendida como uma média de quão emaranhado cada subsistema está com o resto do sistema.

Por fim, Rigolin *et al* [87] criam uma medida que universaliza a média da entropia linear, utilizando diversas partições possíveis para o estado considerado. Desta forma,  $C$  é um caso particular de uma dessas possíveis partições. Aqui deveríamos mencionar que eventualmente  $C$  poderia ser modificada para tentar englobar um número maior de

partições, entretanto uma possibilidade que não foi investigada na presente tese.

### 3.4 Normalização de $C$

Como vimos na seção anterior, defini-se  $C$  em [43] sem se especificar uma normalização particular. Na verdade,  $C$  pode ser empregada diretamente dessa maneira, tomando-se simplesmente  $\mathcal{N}$  como a unidade. Podemos, contudo, formular a medida de maneira que seja normalizada, assim estando compreendida no intervalo  $0 \leq C(|\psi\rangle) \leq 1$ .

Temos que  $\mathcal{N}$  (a constante de normalização de  $C$ ) pode ser inferida através de um resultado em [87], onde é derivada a medida  $R$  (ver Eq. (3.21) no Cap. 2). Nesse artigo, tomando-se  $n = 1$  para  $R_E^{(n)}$ , temos

$$R_E^{(1)}(\rho) = \frac{d}{d-1} \left[ 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{Tr}(\rho_j^2) \right], \quad (3.22)$$

onde  $d$  é a dimensão do espaço de Hilbert do menor dos subsistemas,  $N$  o número de partes,  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  o operador densidade associado ao estado  $|\psi\rangle$ , e  $\rho_j$  seu operador reduzido em relação à  $j$ -ésima parte do sistema.

$R_E^{(1)}$  dado acima é tal que  $0 \leq R_E^{(1)} \leq 1$  [87]. Dada a equivalência entre  $C$  e a média da entropia linear, Eq. (3.21), à luz de  $R_E^{(1)}$  e sua normalização, é possível concluir que temos  $0 \leq C \leq 1$ , caso  $C$  seja definido como

$$C(|\psi\rangle) = \frac{d}{d-1} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i_j \neq i'_j} \sum_{\{I\} \neq \{I'\}} |c_{i_1 \dots i_j \dots i_N} c_{i'_1 \dots i'_j \dots i'_N} - c_{i_1 \dots i'_j \dots i_N} c_{i_1 \dots i_j \dots i'_N}|^2, \quad (3.23)$$

onde aqui a soma é feita apenas sobre combinações de  $\{i_j, i'_j\}$  e  $\{I, I'\}$  que evitem redundâncias.

### 3.5 Estados GHZ generalizados e maximização de $C$

Os estados GHZ [98] são definidos, para estados com  $N > 2$  subsistemas de qubits, como

$$|GHZ\rangle = \frac{|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}}{\sqrt{2}}. \quad (3.24)$$

Meyer e Wallach [80] verificaram que  $Q(|GHZ\rangle) = 1$ , com  $Q$  definido pela equação 2.54. Vamos demonstrar que para uma generalização de GHZ para maiores dimensões,  $C$  também apresenta valor máximo.

Para um sistema de  $N > 2$  partes, cada uma com espaço de Hilbert de dimensão  $d$ , vamos definir

$$|\xi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle^{\otimes N}. \quad (3.25)$$

Para calcular o valor de  $C$  para  $|\xi_{GHZ}\rangle$ , precisamos fazer algumas considerações. Os termos no somatório na Eq. (3.23) — produtos de dois coeficientes  $c$ 's — serão todos no

formato  $c_{i\dots i} c_{j\dots j}$ , com  $i \neq j$  e  $0 \leq i \leq d-1$ . Dado que todos os coeficientes são iguais a  $1/\sqrt{d}$ , o valor de cada um desses termos será  $1/d^2$ . Basta agora calcularmos quantos deles aparecem no somatório. O número de termos para cada  $j$  será dado pela combinação  $\binom{d}{2}$ , e assim, o número total de termos será dado por  $N \frac{d!}{2!(d-2)!}$ . Dessa maneira, podemos calcular  $C$  a partir da Eq. (3.23), encontrando

$$\begin{aligned} C(|\xi_{GHZ}\rangle) &= \frac{d}{d-1} \frac{2}{N} \sum_{i,j}^{i \neq j} |c_{i\dots i} c_{j\dots j}|^2 \\ &= \frac{d}{d-1} \frac{2}{N} N \frac{d!}{2!(d-2)!} \frac{1}{d^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

É importante lembrar aqui que no somatório não consideramos termos que diferem apenas por uma alteração na ordem de  $i$  e  $j$ .

Assim, temos que estados  $|\xi_{GHZ}\rangle$  maximizam a função  $C$ .

### 3.6 Relação entre $C$ e a medida da distância $D$ para estados puros $2 \times 2$

Encontramos anteriormente [43] evidência numérica de que, para estados puros de dois qubits,  $C$  (Eq. 5.16), e a medida da distância,  $D$  (Eq. 2.50), produzem o mesmo ordenamento. Como discutido na Seção 3.2, na verdade existe uma fórmula analítica relacionando diretamente estas quantidades e assim comprovando os resultados numéricos. A seguir derivamos a expressão conectando  $C$  e  $D$  para tais sistemas de dois qubits.

Vamos começar definindo um estado puro de dois qubits, emaranhado ou não, como  $|\Psi\rangle = \sum_{jk} c_{jk} e^{i\theta_{jk}} |jk\rangle$ , e outro não emaranhado como  $|\Phi\rangle = \sum_{jk} d_{jk} e^{i\phi_{jk}} |jk\rangle$ . Os números reais  $c_{jk}, d_{jk}$  estão entre 0 e 1 e  $0 \leq \theta_{jk}, \phi_{jk} < 2\pi$ . Também  $\sum_{jk} c_{jk}^2 = \sum_{jk} d_{jk}^2 = 1$ . Por último, os coeficientes de  $|\Phi\rangle$  satisfazem as condições de separabilidade descritas na Seção 3.1. Tanto o índice  $j$  quanto o índice  $k$  podem assumir os valores 0 ou 1.

A distância entre os dois estados é calculada da seguinte maneira

$$D(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) = \sum_{j,k} |d_{jk} e^{i\phi_{jk}} - c_{jk} e^{i\theta_{jk}}|^2. \quad (3.27)$$

Para sistemas  $2 \times 2$ , essa função pode ser escrita como

$$\begin{aligned} D(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) &= |d_{00} e^{i\phi_{00}} - c_{00} e^{i\theta_{00}}|^2 + |d_{10} e^{i\phi_{10}} - c_{10} e^{i\theta_{10}}|^2 \\ &\quad + |d_{01} e^{i\phi_{01}} - c_{01} e^{i\theta_{01}}|^2 + |d_{11} e^{i\phi_{11}} - c_{11} e^{i\theta_{11}}|^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Queremos encontrar, dado um estado  $|\Psi\rangle$ , qual o menor valor que  $D$  pode assumir variando  $|\Phi\rangle$ , com a restrição de que  $|\Phi\rangle$  seja um estado não emaranhado. Para atingir esse objetivo, aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Primeiro, identificamos



os vínculos do problema. São dois: um associado à normalização do estado e um à sua separabilidade (levando a duas equações). O vínculo associado à separabilidade exige

$$d_{00} \exp[i\phi_{00}] d_{11} \exp[i\phi_{11}] - d_{10} \exp[i\phi_{10}] d_{01} \exp[i\phi_{01}] = 0. \quad (3.29)$$

Assim, para os vínculos, temos

$$\begin{aligned} d_{00}^2 + d_{10}^2 + d_{01}^2 + d_{11}^2 - 1 &= 0, \\ d_{00} d_{11} - d_{10} d_{01} &= 0, \\ \phi_{00} + \phi_{11} - \phi_{10} - \phi_{01} &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dos vínculos do problema, montamos a função auxiliar  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma &= (d_{00}e^{i\phi_{00}} - c_{00}e^{i\theta_{00}})(d_{00}e^{-i\phi_{00}} - c_{00}e^{-i\theta_{00}}) \\ &\quad + (d_{10}e^{i\phi_{10}} - c_{10}e^{i\theta_{10}})(d_{10}e^{-i\phi_{10}} - c_{10}e^{-i\theta_{10}}) \\ &\quad + (d_{01}e^{i\phi_{01}} - c_{01}e^{i\theta_{01}})(d_{01}e^{-i\phi_{01}} - c_{01}e^{-i\theta_{01}}) \\ &\quad + (d_{11}e^{i\phi_{11}} - c_{11}e^{i\theta_{11}})(d_{11}e^{-i\phi_{11}} - c_{11}e^{-i\theta_{11}}) \\ &\quad + \alpha (d_{00}d_{11} - d_{10}d_{01}) + \beta (\phi_{00} + \phi_{11} - \phi_{10} - \phi_{01}) \\ &\quad + \gamma (d_{00}^2 + d_{10}^2 + d_{01}^2 + d_{11}^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os multiplicadores de Lagrange. Calculamos as derivadas parciais para cada uma das variáveis do problema (incluindo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , mas que levam às equações dos vínculos). Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial d_{00}} &= e^{i\phi_{00}}(d_{00}e^{-i\phi_{00}} - c_{00}e^{-i\theta_{00}}) + e^{-i\phi_{00}}(d_{00}e^{i\phi_{00}} - c_{00}e^{i\theta_{00}}) \\ &\quad + \alpha d_{11} + 2\gamma d_{00} \\ &= 2d_{00} - 2c_{00} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) + \alpha d_{11} + 2\gamma d_{00}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial d_{10}} &= e^{i\phi_{10}}(d_{10}e^{-i\phi_{10}} - c_{10}e^{-i\theta_{10}}) + e^{-i\phi_{10}}(d_{10}e^{i\phi_{10}} - c_{10}e^{i\theta_{10}}) \\ &\quad - \alpha d_{01} + 2\gamma d_{10} \\ &= 2d_{10} - 2c_{10} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) + \alpha d_{01} + 2\gamma d_{10}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial d_{01}} &= e^{i\phi_{01}}(d_{01}e^{-i\phi_{01}} - c_{01}e^{-i\theta_{01}}) + e^{-i\phi_{01}}(d_{01}e^{i\phi_{01}} - c_{01}e^{i\theta_{01}}) \\ &\quad - \alpha d_{10} + 2\gamma d_{01} \\ &= 2d_{01} - 2c_{01} \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) + \alpha d_{10} + 2\gamma d_{01}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial d_{11}} &= e^{\imath\phi_{11}}(d_{11}e^{-\imath\phi_{11}} - c_{11}e^{-\imath\theta_{11}}) + e^{-\imath\phi_{11}}(d_{11}e^{\imath\phi_{11}} - c_{11}e^{\imath\theta_{11}}) \\
&\quad + \alpha d_{00} + 2\gamma d_{11} \\
&= 2d_{11} - 2c_{11} \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) + \alpha d_{00} + 2\gamma d_{11},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_{00}} &= \imath d_{00}e^{\imath\phi_{00}}(d_{00}e^{-\imath\phi_{00}} - c_{00}e^{-\imath\theta_{00}}) - \imath d_{00}e^{-\imath\phi_{00}}(d_{00}e^{\imath\phi_{00}} - c_{00}e^{\imath\theta_{00}}) \\
&\quad + \beta \\
&= -2c_{00}d_{00} \sin(\phi_{00} - \theta_{00}) + \beta,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_{10}} &= \imath d_{10}e^{\imath\phi_{10}}(d_{10}e^{-\imath\phi_{10}} - c_{10}e^{-\imath\theta_{10}}) - \imath d_{10}e^{-\imath\phi_{10}}(d_{10}e^{\imath\phi_{10}} - c_{10}e^{\imath\theta_{10}}) \\
&\quad + \beta \\
&= -2c_{10}d_{10} \sin(\phi_{10} - \theta_{10}) + \beta,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_{01}} &= \imath d_{01}e^{\imath\phi_{01}}(d_{01}e^{-\imath\phi_{01}} - c_{01}e^{-\imath\theta_{01}}) - \imath d_{01}e^{-\imath\phi_{01}}(d_{01}e^{\imath\phi_{01}} - c_{01}e^{\imath\theta_{01}}) \\
&\quad + \beta \\
&= -2c_{01}d_{01} \sin(\phi_{01} - \theta_{01}) + \beta,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_{11}} &= \imath d_{11}e^{\imath\phi_{11}}(d_{11}e^{-\imath\phi_{11}} - c_{11}e^{-\imath\theta_{11}}) - \imath d_{11}e^{-\imath\phi_{11}}(d_{11}e^{\imath\phi_{11}} - c_{11}e^{\imath\theta_{11}}) \\
&\quad + \beta \\
&= -2c_{11}d_{11} \sin(\phi_{11} - \theta_{11}) + \beta.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Igualando todas as derivadas a zero, encontramos

$$2d_{00} - 2c_{00} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) + \alpha' d_{11} + 2\gamma d_{00} = 0, \quad (3.40)$$

$$2d_{10} - 2c_{10} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) - \alpha' d_{01} + 2\gamma d_{10} = 0, \quad (3.41)$$

$$2d_{01} - 2c_{01} \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) - \alpha' d_{10} + 2\gamma d_{01} = 0, \quad (3.42)$$

$$2d_{11} - 2c_{11} \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) + \alpha' d_{00} + 2\gamma d_{11} = 0, \quad (3.43)$$

$$2d_{00}c_{00} \sin(\phi_{00} - \theta_{00}) - \beta = 0, \quad (3.44)$$

$$2d_{10}c_{10} \sin(\phi_{10} - \theta_{10}) + \beta = 0, \quad (3.45)$$

$$2d_{01}c_{01} \sin(\phi_{01} - \theta_{01}) + \beta = 0, \quad (3.46)$$

$$2d_{11}c_{11} \sin(\phi_{11} - \theta_{11}) - \beta = 0, \quad (3.47)$$

$$d_{00}d_{11} - d_{10}d_{01} = 0, \quad (3.48)$$

$$\phi_{00} + \phi_{11} = \phi_{10} + \phi_{01}, \quad (3.49)$$

$$d_{00}^2 + d_{10}^2 + d_{01}^2 + d_{11}^2 = 1. \quad (3.50)$$

Fazendo  $\alpha' = 2\alpha$ , podemos rearranjar as equações (3.40)-(3.43) como

$$c_{00} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) = \alpha d_{11} + (\gamma + 1)d_{00}, \quad (3.51)$$

$$c_{10} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) = -\alpha d_{01} + (\gamma + 1)d_{10}, \quad (3.52)$$

$$c_{01} \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) = -\alpha d_{10} + (\gamma + 1)d_{01}, \quad (3.53)$$

$$c_{11} \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) = \alpha d_{00} + (\gamma + 1)d_{11}. \quad (3.54)$$

Podemos agora elevar ao quadrado e somar as equações (3.51)-(3.54), ou seja, efetuar a operação  $(3.51)^2 + (3.52)^2 + (3.53)^2 + (3.54)^2$ , obtendo

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (\gamma + 1)^2 &= c_{00}^2 \cos^2(\phi_{00} - \theta_{00}) + c_{10}^2 \cos^2(\phi_{10} - \theta_{10}) \\ &\quad + c_{01}^2 \cos^2(\phi_{01} - \theta_{01}) + c_{11}^2 \cos^2(\phi_{11} - \theta_{11}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para o primeiro termo da equação (3.55)

$$c_{00}^2 \cos^2(\phi_{00} - \theta_{00}) = c_{00}^2 - c_{00}^2 \sin^2(\phi_{00} - \theta_{00}) = c_{00}^2 - \frac{\beta^2}{4d_{00}^2}, \quad (3.56)$$

sendo que no último passo utilizamos a equação (3.44). Podemos repetir tal desenvolvimento com os termos análogos, e dessa forma escrever a equação (3.55) como

$$1 - \frac{\beta^2}{4} \left( \frac{1}{d_{00}^2} + \frac{1}{d_{10}^2} + \frac{1}{d_{01}^2} + \frac{1}{d_{11}^2} \right) = \alpha^2 + (\gamma + 1)^2, \quad (3.57)$$

ou

$$1 - \left( \frac{\beta}{2d_{11}d_{00}} \right)^2 = \alpha^2 + (\gamma + 1)^2. \quad (3.58)$$

Voltando agora para a expressão para  $D$ , algumas manipulações algébricas nos levam a (aqui omitimos os argumentos da função)

$$\begin{aligned} D = 2 - 2d_{00}c_{00} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) - 2d_{10}c_{10} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) \\ - 2d_{01}c_{01} \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) - 2d_{11}c_{11} \cos(\phi_{11} - \theta_{11}). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Podemos multiplicar as equações (3.40)-(3.43) por termos convenientes e obter

$$2d_{00}^2 - 2c_{00}d_{00} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) + 2\alpha d_{11}d_{00} + 2\gamma d_{00}^2 = 0, \quad (3.60)$$

$$2d_{10}^2 - 2c_{10}d_{10} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) + 2\alpha d_{01}d_{10} + 2\gamma d_{10}^2 = 0, \quad (3.61)$$

$$2d_{01}^2 - 2c_{01}d_{01} \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) + 2\alpha d_{10}d_{01} + 2\gamma d_{01}^2 = 0, \quad (3.62)$$

$$2d_{11}^2 - 2c_{11}d_{11} \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) + 2\alpha d_{00}d_{11} + 2\gamma d_{11}^2 = 0. \quad (3.63)$$

Somando então as equações (3.60)-(3.63), encontramos

$$\begin{aligned} 0 = 2 - 2c_{00}d_{00} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) - 2c_{10}d_{10} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) \\ - 2c_{01}d_{01} \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) - 2c_{11}d_{11} \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) + 2\gamma. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Disto chegamos que  $D = -2\gamma$ .

Vamos agora analisar a grandeza  $C$ . Expandindo-a, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{C}{4} &= (c_{00}c_{11}e^{i(\theta_{00}+\theta_{11})} - c_{10}c_{01}e^{i(\theta_{10}+\theta_{01})}) \\ &\quad \times (c_{00}c_{11}e^{-i(\theta_{00}+\theta_{11})} - c_{10}c_{01}e^{-i(\theta_{10}+\theta_{01})}) \\ &= c_{00}^2 + c + 11^2 + c_{10}^2 + c_{01}^2 - c_{00}c_{11}c_{10}c_{01}e^{i(\theta_{00}+\theta_{11})}e^{-i(\theta_{10}+\theta_{01})} \\ &\quad - c_{00}c_{11}c_{10}c_{01}e^{-i(\theta_{00}+\theta_{11})}e^{i(\theta_{10}+\theta_{01})} \\ &= c_{00}^2 + c + 11^2 + c_{10}^2 + c_{01}^2 - 2c_{00}c_{11}c_{10}c_{01} \cos(\theta_{00} + \theta_{11} - \theta_{10} - \theta_{01}). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Voltando agora às equações (3.51)-(3.54), multiplicando (3.51) por (3.54) e (3.52) por (3.53), temos

$$\begin{aligned} c_{00}c_{11} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) &= \alpha^2 d_{11}d_{00} + (\gamma + 1)^2 d_{00}d_{11} \\ &\quad + \alpha(\gamma + 1)(d_{11}^2 + d_{00}^2), \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} c_{10}c_{01} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) &= (\gamma + 1)^2 d_{10}d_{01} - \alpha(\gamma + 1)(d_{10}^2 + d_{01}^2) \\ &\quad + \alpha^2 d_{10}d_{01}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Subtraindo a equação (3.67) da equação (3.66)

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma + 1) &= c_{00}c_{11} \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) \\ &\quad - c_{10}c_{01} \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) \cos(\phi_{01} - \theta_{01}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Vamos agora multiplicar as equações (3.44) pela (3.47) e (3.45) pela (3.46).

$$c_{00}c_{11} \sin(\phi_{00} - \theta_{00}) \sin(\phi_{11} - \theta_{11}) = \frac{\beta^2}{4d_{00}d_{11}}, \quad (3.69)$$

$$c_{10}c_{01} \sin(\phi_{10} - \theta_{10}) \sin(\phi_{01} - \theta_{01}) = \frac{\beta^2}{4d_{10}d_{01}}. \quad (3.70)$$

Subtraindo a equação (3.70) da equação (3.69),

$$\begin{aligned} 0 &= c_{00}c_{11} \sin(\phi_{00} - \theta_{00}) \sin(\phi_{11} - \theta_{11}) \\ &\quad - c_{10}c_{01} \sin(\phi_{10} - \theta_{10}) \sin(\phi_{01} - \theta_{01}). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Agora, podemos subtrair a equação (3.68) da equação (3.71), encontrando

$$\alpha(\gamma + 1) = c_{00}c_{11} \cos(\phi_{00} + \phi_{11} - \theta_{00} - \theta_{11}) - c_{10}c_{01} \cos(\phi_{10} + \phi_{01} - \theta_{10} - \theta_{01}). \quad (3.72)$$

Vamos agora obter uma equação semelhante à equação (3.72), mas com senos ao invés de cossenos. Multiplicando (3.44) por (3.54)

$$c_{00}c_{11} \sin(\phi_{00} - \theta_{00}) \cos(\phi_{11} - \theta_{11}) = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \frac{d_{11}}{d_{00}}. \quad (3.73)$$

Similarmente, das equações (3.47) por (3.51),

$$c_{11}c_{00} \sin(\phi_{11} - \theta_{11}) \cos(\phi_{00} - \theta_{00}) = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \frac{d_{00}}{d_{11}}. \quad (3.74)$$

Somando as duas equações

$$c_{00}c_{11} \sin(\phi_{00} + \phi_{11} - \theta_{00} - \theta_{11}) = \alpha\beta + \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \left( \frac{c_{11}^2 + c_{00}^2}{c_{11}c_{00}} \right). \quad (3.75)$$

Agora, multiplicando (3.45) por (3.53)

$$c_{10}c_{01} \sin(\phi_{10} - \theta_{10}) \cos(\phi_{01} - \theta_{01}) = \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \frac{d_{01}}{d_{10}}. \quad (3.76)$$

De maneira análoga, multiplicando (3.46) por (3.52)

$$c_{01}c_{10} \sin(\phi_{01} - \theta_{01}) \cos(\phi_{10} - \theta_{10}) = \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \frac{d_{10}}{d_{01}}. \quad (3.77)$$

Somando as equações (3.76) e (3.77),

$$c_{10}c_{01} \sin(\phi_{10} + \phi_{01} - \theta_{10} - \theta_{01}) = \alpha\beta - \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \left( \frac{c_{10}^2 + c_{01}^2}{c_{10}c_{01}} \right). \quad (3.78)$$

Subtraindo a equação (3.78) da equação (3.75), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\beta(\gamma + 1)}{2} \left( \frac{1}{c_{00}c_{11}} \right) &= c_{00}c_{11} \sin(\phi_{00} + \phi_{11} - \theta_{00} - \theta_{11}) \\ &\quad - c_{10}c_{01} \sin(\phi_{10} + \phi_{01} - \theta_{10} - \theta_{01}). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Agora podemos somar os quadrados das equações (3.72) e (3.79) para obter

$$\begin{aligned} \alpha^2(\gamma + 1)^2 + \left( \frac{\beta}{2d_{11}d_{00}} \right)^2 (\gamma + 1)^2 &= c_{00}^2c_{11}^2 + c_{10}^2c_{01}^2 - 2c_{00}c_{11}c_{10}c_{01} \\ &\quad \times \left[ \cos(\phi_{00} + \phi_{11} - \theta_{00} - \theta_{11}) \right. \\ &\quad \times \cos(\phi_{10} + \phi_{01} - \theta_{10} - \theta_{01}) \\ &\quad + \sin(\phi_{00} + \phi_{11} - \theta_{00} - \theta_{11}) \\ &\quad \times \sin(\phi_{10} + \phi_{01} - \theta_{10} - \theta_{01}) \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Utilizando a Eq. (3.80), a equação acima pode ser reescrita como

$$(\gamma + 1)^2 - (\gamma + 1)^4 = c_{00}^2c_{11}^2 + c_{10}^2c_{01}^2 - 2c_{00}c_{11}c_{10}c_{01} \cos(\theta_{00} + \theta_{11} - \theta_{10} - \theta_{01}). \quad (3.81)$$

E portanto, temos

$$\frac{C}{4} = (\gamma + 1)^2 - (\gamma + 1)^4. \quad (3.82)$$

Dado que sabemos que  $D = -2\gamma$ , a relação entre  $C$  e  $D$  é

$$\frac{C}{4} = \left( 1 - \frac{D}{2} \right)^2 - \left( 1 - \frac{D}{2} \right)^4. \quad (3.83)$$

Isolando  $D$  na equação (3.83), temos

$$D = 2 \pm \sqrt{2 \pm 2\sqrt{1 - C}}. \quad (3.84)$$

Agora, para tomarmos os sinais corretos, impomos o fato de que ambas as medidas identificam corretamente estados não emaranhados, ou seja, para  $C = 0$ , temos  $D = 0$ . Dessa maneira, a relação entre  $C$  e  $D$  é dada por

$$D = 2 - \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - C}}. \quad (3.85)$$

Note que  $D$  é uma função crescente de  $C$ .

# Propostas de medidas de emaranhamento através da função $C$ combinada com processos de minimização

## 4.1 A questão geral da definição de medidas de emaranhamento e de correlações quânticas

Da discussão feita no Cap. 2, fica claro que a definição de emaranhamento é baseada no estabelecimento de preceitos universais, bem como requisitos mínimos, que uma certa medida (satisfatória)  $\mu$  deva satisfazer. Na verdade, mais recentemente tal postura tem se estendido à diversas tentativas de caracterização de qualquer tipo de correlação quântica [42], ou seja, correlações que só podem surgir de efeitos essencialmente quânticos (sendo a discórdia quântica um dos exemplos mais importantes [99], diferindo ela do emaranhamento apenas para estados mistos [100]).

Por exemplo, num trabalho extremamente técnico [99], os autores propõem definições bem gerais do que seria uma “boa” função de correlação, inclusive diferenciando entre condições “necessárias”, condições “razoáveis” (no original, *reasonable*) e condições “discutíveis” (no original, *debatable*), para a mesma. Então, discutem o que esperar de correlações a partir de processos clássicos e, finalmente, como identificar resultados oriundos exclusivamente de processos quânticos. Em outro artigo, relativamente especulativo mas formalmente interessante (nessa linha ver também [101]), generalizações de correlações quânticas já bem estabelecidas, tais como a violação das desigualdades de Bell, são obtidas quando se exige que efeitos causais de variáveis não-locais do sistema sejam minimizados [102]. Ainda em outra abordagem [103], parte-se da ideia de um estado clássico-quântico. Um sistema clássico-quântico é aquele onde se conhece certa informação que é clássica, associada a uma informação puramente quântica. Portanto, a matriz densidade do problema (digamos, formado por dois subsistemas,  $A$  e  $B$ ) é dada por  $\hat{\rho} = \sum_l p_l \hat{\rho}_l^{(B)} \otimes \hat{\rho}_l^{(A)}$ ,

onde  $\{p_l\}$  são probabilidades,  $\hat{\rho}_l^{(A)} \hat{\rho}_l^{(A)} = \hat{\rho}_l^{(A)}$  e  $\hat{\rho}_l^{(B)} = |l^{(B)}\rangle\langle l^{(B)}|$ . Existe um teste bem estabelecido para se identificar um estado clássico-quântico [103]. Assim, correlações quânticas são definidas a partir de violações de tal teste.

Outra corrente busca pela simplificação nas definições de correlações quânticas, por exemplo: usando apenas propriedades básicas da matriz densidade do sistema para tal [104]; tentando minimizar a quantidade de informação necessária — obtida por medidas locais — bem como controlando o erro cometido devido a uma restrição no número dessas medidas na determinação do grau de correlação [105]; ou mesmo propondo processos físicos específicos, como diminuição de temperatura através de desmagnetização adiabática [106], que naturalmente gerem correlações não-clássicas no sistema. Neste último caso, correlações quânticas só podem ser analisadas se o sistema apresentar a fenomenologia exigida pelo processo considerado.

Por último, uma linha recente de estudo tenta desenvolver protocolos globais na investigação de problemas de informação quântica, levando à questão correlata de como determinar a natureza quântica de correlações arbitrárias [107, 108]. Assim, cálculo de medidas, a princípio distintas, tais como discórdia e emaranhamento podem ser feitas através de um mesmo procedimento algorítmico (por exemplo, baseado em versões simplificadas de algoritmos genéricos [109]). Também, emaranhamento pode surgir como uma medida derivada, resultante de alguma outra correlação quântica tomada como mais primitiva (ver, por exemplo, o capítulo 2 de [100], de autoria de S. Luo).

Motivados pelas discussões acima é que neste capítulo expandimos a ideia da medida  $C$ , considerando-a como ponto de partida para derivação de outras medidas de emaranhamento para estados puros. A metodologia básica será partir de uma função (de nossa escolha), que deverá então ser extremizada com a condição de verificar  $C$ .

## 4.2 A ideia de “deformar” um estado no espaço de coeficientes e medidas $\mu_C$

Considere  $|\psi\rangle = \sum_{k_1, \dots, k_N} c_{k_1 \dots k_N} |k_1 \dots k_N\rangle$  como um estado puro de  $N$  partes, cada parte  $P_n$  descrita num espaço de Hilbert de dimensão  $d_n$  em uma base com autovetores  $\{|0_n\rangle, \dots, |d_n - 1\rangle\}$ . Vimos no Cap. 3 que podemos montar um conjunto de relações envolvendo os coeficientes desse estado, contruídas a partir do termo básico

$$c_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}} = c_{k_1 \dots k_n \dots k_N} c_{k'_1 \dots k'_n \dots k'_N} - c_{k_1 \dots k'_n \dots k_N} c_{k'_1 \dots k_n \dots k'_N}, \quad (4.1)$$

onde  $n$  varia de 1 a  $N$ . Os índices respeitam as restrições de  $k_n \neq k'_n$  e  $\{k_1, \dots, k_{n-1}, k_{n+1}, \dots, k_N\} \neq \{k'_1, \dots, k'_{n-1}, k'_{n+1}, \dots, k'_N\}$ . Caso todas as expressões do tipo  $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}}$  sejam nulas, o estado é separável e, portanto, não emaranhado. Por outro lado, se ao menos um  $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}}$  for diferente de zero, o estado será necessariamente emaranhado. Assim, a medida  $C$  simplesmente soma o módulo quadrado de todos os  $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}}$  não nulos, sendo uma possível forma de determinar o quanto  $|\psi\rangle$  está afastado



da condição de ser um estado separável.

Poderíamos, entretanto, pensar num procedimento reverso. De alguma forma modificar, ou “deformar”, os coeficientes de um estado emaranhado de modo a anular os termos gerados pela Eq (4.1). Uma função fornecendo o montante de deformação necessária nos coeficientes individuais seria nossa medida de emaranhamento.

Para tal, podemos mudar os coeficientes em  $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}} \neq 0$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} c_{k_1 \dots k_n \dots k_N} &\rightarrow c_{k_1 \dots k_n \dots k_N} - g_{k_1 \dots k_n \dots k_N}, \\ c_{k'_1 \dots k'_n \dots k'_N} &\rightarrow c_{k'_1 \dots k'_n \dots k'_N} - g_{k'_1 \dots k'_n \dots k'_N}, \\ c_{k'_1 \dots k_n \dots k'_N} &\rightarrow c_{k'_1 \dots k_n \dots k'_N} - g_{k'_1 \dots k_n \dots k'_N}, \\ c_{k_1 \dots k'_n \dots k_N} &\rightarrow c_{k_1 \dots k'_n \dots k_N} - g_{k_1 \dots k'_n \dots k_N}, \end{aligned}$$

tal que com estas deformações

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}} &= |(c_{k_1 \dots k_n \dots k_N} - g_{k_1 \dots k_n \dots k_N})(c_{k'_1 \dots k'_n \dots k'_N} - g_{k'_1 \dots k'_n \dots k'_N}) \\ &\quad - (c_{k_1 \dots k'_n \dots k_N} - g_{k_1 \dots k'_n \dots k_N})(c_{k'_1 \dots k_n \dots k'_N} - g_{k'_1 \dots k_n \dots k'_N})| = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Naturalmente, qualquer deformação precisa levar a um estado normalizado, assim satisfazendo

$$\Delta_{\mathcal{N}} \equiv \sum_{k_1 \dots k_N} |c_{k_1 \dots k_n \dots k_N} - g_{k_1 \dots k_n \dots k_N}|^2 = 1. \quad (4.3)$$

É simples perceber que temos grande liberdade na maneira de deformar os coeficientes originais de  $|\psi\rangle$ , levando a um estado não emaranhado. Isto ocorre devido à enorme diversidade de soluções para a Eq. (4.2). A cada estado não emaranhado podemos associar um conjunto, ao qual chamaremos “coeficientes de deformação”, definidos como  $g_{k_1 \dots k_N}$  tal que as Eqs. (4.2) e (4.3) sejam respeitadas. Logo, podemos estipular uma medida de emaranhamento  $\mu_C$  que seja função desses “coeficientes de deformação”  $g_{k_1 \dots k_n \dots k_N}$  (e que por sua vez são dependentes dos  $c$ ’s originais). Também podemos exigir que os  $g$ ’s sejam tais a minimizar  $\mu_C$ , ou seja, desejamos escrever a medida em termos da menor “deformação” possível para  $|\psi\rangle$  (especificada por  $\mu_C$ ), tornando-o um estado separável.

### 4.3 Uma formulação matemática para $\mu_C$

Nos moldes descrito acima, queremos um conjunto  $\{g_{\mathbf{k}}\}$  que minimize uma medida  $\mu_C$  e satisfaça às Eq. (4.2) e (4.3). Um problema com essas características pode ser resolvido utilizando-se a técnica de multiplicadores de Lagrange. Assim, definimos a função auxiliar

$$\begin{aligned} L(\{g_{\mathbf{k}}\}; \lambda_C, \lambda_{\mathcal{N}}; \lambda_1, \dots, \lambda_M) &= \mu_C(\{g_{\mathbf{k}}\}) + \lambda_C \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}} \\ &\quad + \lambda_{\mathcal{N}} (\Delta_{\mathcal{N}} - 1) + \sum_{m=1}^{m=M} \lambda_m f_m(\{g_{\mathbf{k}}\}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Então, exigindo que  $\partial L/\partial \lambda_C = 0$ , temos  $\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}', \mathbf{k}_{(n)}\mathbf{k}'_{(n)}} = 0$ , que é a condição da deformação levar a um estado separável (ver Eq. (4.2)). Já de  $\partial L/\partial \lambda_N = 0$ , obtemos a normalização correta, Eq. (4.3). Eventualmente poderíamos ter interesse em impor restrições extras aos coeficientes de deformação  $\{g_{\mathbf{k}}\}$ . Isto seria possível através de  $\partial L/\partial \lambda_m = 0$ , resultando em  $f_m(\{g_{\mathbf{k}}\}) = 0$ , com os  $f_m$ 's determinando tais restrições. Por último, de  $\partial L/\partial g_{\mathbf{k}} = 0$  para cada possível  $\mathbf{k}$ , teríamos o sistema completo de equações a serem resolvidas para obter nossa solução final.

A escolha específica de  $\mu_C$  vai definir que procedimento estamos considerando para levar um estado emaranhado a um estado fatorável. A resolução matemática do sistema descrito acima acha desta forma o  $|\phi\rangle$  separável para o qual é “mais fácil” deformar  $|\psi\rangle$ . No presente esquema, as restrições mais básicas que medidas de emaranhamento precisam verificar são introduzidas da seguinte forma.

Primeiro devemos exigir que qualquer que seja a forma funcional de  $\mu_C$ , deve ser tal que  $\mu_C \geq 0$ . Em segundo, se o  $|\psi\rangle$  original é separável, claramente uma solução possível para nossas equações é todos os  $g$ 's serem nulos. Desta forma, se impusermos  $\mu_C(\{0\}) = 0$ , então garantiremos que  $\mu_C(|\phi_{sep}\rangle) = 0$ .

Em terceiro, queremos invariância por mudança de base. Para essa discussão vamos relembrar a essência de transformações de base em mecânica quântica. Para manter a análise simples, suponha duas bases ortonormais  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  (com  $n = 1, \dots, N$ ) para o espaço de Hilbert contável finito  $\mathcal{H}$ . Como  $\{|a_m\rangle\}$  é uma base, qualquer vetor  $|b_n\rangle$  pode ser escrito como (nota: apesar de parecer não-convencional, os índices devem aparecer na ordem abaixo)

$$|b_n\rangle = \sum_{m=1}^{m=N} \Gamma_{mn} |a_m\rangle. \quad (4.5)$$

De forma similar, qualquer vetor  $|a_n\rangle$  deveria ser escrito em termos de  $\{|b_m\rangle\}$ . Para isto ser verdade e compatível com a Eq. (4.5), necessariamente a matriz  $\Gamma$  acima tem que ser unitária, ou seja,  $\Gamma \Gamma^\dagger = \Gamma^\dagger \Gamma = I$ . Agora suponha

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n=1}^{n=N} \alpha_n |a_n\rangle = \sum_{m=1}^{m=N} \beta_m |b_m\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{m=N} \beta_m \sum_{n=1}^{n=N} \Gamma_{nm} |a_n\rangle = \sum_{n=1}^{n=N} \left( \sum_{m=1}^{m=N} \Gamma_{nm} \beta_m \right) |a_n\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Portanto, os coeficientes da expansão de  $|\psi\rangle$  nas duas bases se transformam de acordo com

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{m=N} \Gamma_{nm} \beta_m. \quad (4.7)$$

Retornando ao nosso problema original, para termos invariância por troca de base, temos que escolher funções  $\mu_C$  de modo que  $\mu_C(\{g_{\mathbf{k}}\}) = \mu_C(g'_{\mathbf{k}})$ , tais que  $g_{\mathbf{k}}$  sejam os coeficientes de  $|\psi\rangle$  e  $g'_{\mathbf{k}}$  os obtidos para um estado  $\Gamma|\psi\rangle$ , sendo  $\Gamma$  uma matriz unitária local.

Como comentários finais, pode parecer um pouco ‘árido’ o modo bastante técnico

como introduzimos a medida de emaranhamento  $\mu_C$ . Entretanto, como discutido na Sec. 4.1, várias abordagens recentes [99, 102, 109] para correlações quânticas discutem o problema de maneira bastante formal, até mesmo axiomática [101]. A arbitrariedade em se testar distintas funções  $\mu_C$  pode levar a quantidades de pouco ou nenhum interesse físico. Desta forma, aplicações concretas é que devem ser os norteadores na seleção de “boas”  $\mu_C$ ’s. Também poderíamos estar interessados em definir grau de emaranhamento através da deformação de  $|\psi\rangle$  para algum  $|\phi\rangle$ , mas não considerando todas as possibilidades de estados sepárveis  $|\phi\rangle$  no espaço de Hilbert do sistema. As funções  $f_m$  certamente ajudariam nesta tarefa de restrição dos sub-espacos de  $\mathcal{H}$  a serem considerados. Por último, mencionamos acima que buscamos os coeficientes  $g_k$ ’s resultando na deformação “mais fácil” de  $|\psi\rangle$  para  $|\phi\rangle$ . Isto poderia remeter à ideia de adjacências, portanto de norma, logo na medida  $D(|\psi\rangle) = \text{Min}_{|\phi\rangle} ||\psi\rangle - |\phi\rangle||$ . É fácil perceber que esta é uma possibilidade para  $\mu_C$  (ver a seguir). Entretanto, como formulado  $\mu_C$  representa um processo mais geral, uma espécie de função de penalização (ou custo) para fazermos  $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ . Assim, dependendo de  $\mu_C$  o menor custo não é o de deformar  $|\psi\rangle$  no estado  $|\phi_{sep}\rangle$  geometricamente mais próximo.

O objetivo desta tese não é desenvolver o cálculo de correlações quânticas ou de emaranhamento em situações específicas, mas sim de discutir de forma geral o conceito e diferentes construções para tais quantidades. Como deve ter ficado claro, nosso método de gerar medidas de emaranhamento pode ser de trabalhosa solução analítica, especialmente para sistemas de alta dimensão. Assim, iremos exemplificar a proposta em um contexto simples o suficiente para ilustrar suas características e apresentar solução fechada.

## 4.4 Estados bipartidos de qubits

Trataremos aqui de um caso simples, um estado puro de dois qubits, tal que  $|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ . Se  $|\psi\rangle$  não é emaranhado, teremos apenas uma expressão para os  $c$ ’s na Eq. (4.1), ou

$$c = c_{00} c_{11} - c_{01} c_{10} \quad (4.8)$$

sendo diferente 0. Dessa forma, para “coeficientes de deformação” dados por  $\{x, y, z, w\}$ , temos, a partir das Eqs. (4.2) e (4.3)

$$\Delta = (c_{00} - x)(c_{11} - y) - (c_{01} - z)(c_{10} - w) = 0 \quad (4.9)$$

e

$$\Delta_{\mathcal{N}} = |c_{00} - x|^2 + |c_{11} - y|^2 + |c_{01} - z|^2 + |c_{10} - w|^2 = 1. \quad (4.10)$$

Como já observado, os “coeficientes de deformação”  $\{x, y, z, w\}$  serão escolhidos tal que minimizem  $\mu_C(x, y, z, w)$ . Discutimos em nossa dissertação de mestrado [43] que para estados bipartidos de qubits, os resultados qualitativos para a medida  $C$  se os coeficientes são reais ou complexos são exatamente os mesmos. Entretanto, para coeficientes reais

os cálculos ficam bastante simplificados (ver, por exemplo, a última seção do capítulo 3, onde tratamos o caso geral complexo e a álgebra necessária se torna bastante elaborada). Assim, assumiremos apenas coeficientes reais  $c_{kk'}$ , o que implica que  $\{x, y, z, w\}$  também devem ser reais [43]. Desconsiderando as funções extras  $f_m$ , temos portanto as derivadas da função auxiliar

$$\frac{\partial \mu_C(x, y, z, w)}{\partial x} + \lambda_C(y - c_{11}) + 2\lambda_N(x - c_{00}) = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \mu_C(x, y, z, w)}{\partial y} + \lambda_C(x - c_{00}) + 2\lambda_N(y - c_{11}) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mu_C(x, y, z, w)}{\partial z} - \lambda_C(w - c_{10}) + 2\lambda_N(z - c_{01}) = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \mu_C(x, y, z, w)}{\partial w} - \lambda_C(z - c_{01}) + 2\lambda_N(w - c_{10}) = 0. \quad (4.14)$$

#### 4.4.1 Uma escolha particular para $\mu_C$ : obtendo a medida de distância

Lembrando que devemos ter  $\mu_C(x, y, z, w) \geq 0$ ,  $\mu_C(0, 0, 0, 0) = 0$  e  $\mu_C$  invariante por transformações unitárias de seus argumentos. Como estamos considerando todos os coeficientes reais, a última condição se reduz a invariância por transformações ortogonais. Dada tais restrições, uma escolha simples para  $\mu_C$  é a seguinte

$$\mu_C(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2. \quad (4.15)$$

Com isso, o sistema completo de equações a serem resolvidas é

$$2x + \lambda_C(y - c_{11}) + 2\lambda_N(x - c_{00}) = 0, \quad (4.16)$$

$$2y + \lambda_C(x - c_{00}) + 2\lambda_N(y - c_{11}) = 0, \quad (4.17)$$

$$2z - \lambda_C(w - c_{10}) + 2\lambda_N(z - c_{01}) = 0, \quad (4.18)$$

$$2w - \lambda_C(z - c_{01}) + 2\lambda_N(w - c_{10}) = 0, \quad (4.19)$$

$$(x - c_{00})(y - c_{11}) - (z - c_{01})(w - c_{10}) = 0, \quad (4.20)$$

$$(x - c_{00})^2 + (y - c_{11})^2 + (z - c_{01})^2 + (w - c_{10})^2 = 1. \quad (4.21)$$

Vamos fazer as seguintes substituições de variáveis

$$x - c_{00} = -\tilde{x}, \quad y - c_{11} = -\tilde{y}, \quad z - c_{10} = -\tilde{z} \quad w - c_{10} = -\tilde{w}, \quad (4.22)$$

bem como a renormalização  $\lambda_C \rightarrow 2\lambda_C$ . Assim, as equações anteriores ficam

$$(\tilde{x} - c_{00}) + \lambda_C \tilde{y} + \lambda_N \tilde{x} = 0, \quad (4.23)$$

$$(\tilde{y} - c_{11}) + \lambda_C \tilde{x} + \lambda_N \tilde{y} = 0, \quad (4.24)$$

$$(\tilde{z} - c_{01}) - \lambda_C \tilde{w} + \lambda_N \tilde{z} = 0, \quad (4.25)$$

$$(\tilde{w} - c_{10}) - \lambda_C \tilde{z} + \lambda_N \tilde{w} = 0, \quad (4.26)$$

$$\tilde{x} \tilde{y} - \tilde{z} \tilde{w} = 0, \quad (4.27)$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 + \tilde{w}^2 = 1. \quad (4.28)$$

Note que em termos das novas variáveis,  $\mu_C = (c_{00} - \tilde{x})^2 + (c_{11} - \tilde{y})^2 + (c_{01} - \tilde{z})^2 + (c_{10} - \tilde{w})^2$ .

#### 4.4.2 Método da distância aplicado ao estado bipartido de qubits com coeficientes reais

Retomando o estado da seção anterior,  $|\psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle$ , com todos os  $c_{kk'}$  reais, vamos encontrar as condições para um estado, também com coeficientes reais, dado por  $|\phi\rangle = \bar{x}|00\rangle + \bar{w}|10\rangle + \bar{z}|01\rangle + \bar{y}|11\rangle$ , ser o estado não emaranhado mais próximo a  $|\psi\rangle$ . Portanto, queremos  $D(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}) = \sqrt{d_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})}$ , tal que

$$d_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}) = (c_{00} - \bar{x})^2 + (c_{11} - \bar{y})^2 + (c_{01} - \bar{z})^2 + (c_{10} - \bar{w})^2 \quad (4.29)$$

seja mínimo. Além disso, também impomos

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{w}^2 = 1 \quad (4.30)$$

e

$$\bar{x} \bar{y} - \bar{z} \bar{w} = 0. \quad (4.31)$$

Este problema de minimização também é resolvido por multiplicadores de Lagrange, com a seguinte função auxiliar

$$\begin{aligned} K(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}, 2\lambda_C, \lambda_N) &= d_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}) + 2\lambda_C (\bar{x} \bar{y} - \bar{z} \bar{w}) \\ &\quad + \lambda_N (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{w}^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Portanto, encontramos

$$(\bar{x} - c_{00}) + \lambda_C \bar{y} + \lambda_N \bar{x} = 0, \quad (4.33)$$

$$(\bar{y} - c_{11}) + \lambda_C \bar{x} + \lambda_N \bar{y} = 0, \quad (4.34)$$

$$(\bar{z} - c_{01}) - \lambda_C \bar{w} + \lambda_N \bar{z} = 0, \quad (4.35)$$

$$(\bar{w} - c_{10}) - \lambda_C \bar{z} + \lambda_N \bar{w} = 0, \quad (4.36)$$

$$\bar{x} \bar{y} - \bar{z} \bar{w} = 0, \quad (4.37)$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{w}^2 = 1. \quad (4.38)$$

O sistema acima tem solução, como demonstrado no Cap. 3.

Desta forma, o conjunto  $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}\}$  apresenta os mesmos valores que  $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}\}$ . Consequentemente,  $\mu_C = d_2 = D^2$  e o nosso método gera a medida de emaranhamento da distância.

Fica claro, portanto, que podemos pensar no presente como um protocolo para gerar distintas medidas de emaranhamento, assumindo formas funcionais específicas para  $\mu_C$ . Seria interessante, no futuro, comparar nossa metodologia com os procedimentos formais extremamente gerais mencionados no começo do capítulo.

## 4.5 Relaxando as condições para o procedimento da seção 4.3

Para encerrar este capítulo, vamos considerar a possibilidade de estender nosso protocolo a situações mais diversas. Relembramos que como mencionado na seção 4.1, existem propostas na literatura [102, 103, 105] onde emaranhamento e outras formas de correlação quântica emergem de construções mais gerais [109], ou mesmo certas correlações sendo derivadas de outras [100].

A Eq. (4.4) é bastante flexível, pois grande parte das características da medida estão codificadas na própria forma funcional de  $\mu_C$ . Por exemplo,  $\mu_C(|\psi\rangle) \geq 0$  e  $\mu_C(|\phi_{sep}\rangle) = 0$  são condições facilmente obtidas. Já a invariância por transformações unitárias locais exige uma seleção mais cuidadosa de  $\mu_C$ . Como vimos no Cap. 2, existem correlações quânticas que não necessariamente são invariantes por tais transformações (no Cap. 5 discutiremos esta questão de forma mais detalhada). Aqui, iremos realizar um exercício de física matemática, relaxando as restrições sobre  $\mu_C$  (portanto, talvez um resultado desta tese de menos interesse em informação quântica). No entanto, vamos manter o requisito de que medidas de emaranhamento são sempre grandezas positivas e se anulam para estados não-emaranhados [23].

Normas  $p$  são funções de um espaço vetorial  $V$  (definido sobre um subconjunto do campo complexo), levando um vetor num número real não-negativo (portanto, sendo positivas definidas). Elas também devem ser subaditivas (ou seja, verificam a desigualdade triangular) e absolutamente homogêneas ( $p(a\mathbf{v}) = |a|p(\mathbf{v})$ , para  $a$  um escalar e  $\mathbf{v} \in V$ ). Sendo  $\mathbf{v} = \sum_k v_k \hat{e}_k$ , uma  $p$ -norma é definida como  $\|\mathbf{v}\|_p = (\sum_k |v_k|^p)^{1/p}$ . Um caso especial importante é a 1-norma, ou geometria de táxi, ou distância Manhattan [110, 111], encontrando várias aplicações em diferentes ramos da física e da matemática [112–118]. Para dois pontos definidos por  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$  tem-se a distância (ou comprimento) Manhattan como

$$d_M = \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|. \quad (4.39)$$

Num espaço real, a distância Manhattan é invariante por translações e reflexões, mas não por rotações. Portanto, no caso complexo as transformações que deixam invariante  $d_M$  são bastante limitadas.

Logo, vamos assumir  $\mu_C$  na Eq. (4.4) como sendo  $M$ , onde

$$M(\{c_{\mathbf{k}}, g_{\mathbf{k}}\}) = \sum_{k_1, \dots, k_N} |c_{k_1 \dots k_N} - g_{k_1 \dots k_N}|. \quad (4.40)$$

Da mesma forma que mostramos na seção anterior a equivalência entre a medida da distância  $D$  e o nosso método com  $\mu_C$  dado pela Eq. (4.16). Segue que aqui também, o nosso procedimento usando  $M$  acima resulta no mesmo que definir uma medida como a distância a um estado fatorável mais próximo, apenas tomando tal distância como o comprimento Manhattan.

Tecnicamente, uma das diferenças é que o cálculo explícito das expressões é bastante mais trabalhoso que no caso da distância usual, sendo assim um exercício interessante. Para o caso de dois qubits, derivamos explicitamente os resultados para a medida  $M$ . Os detalhes são todos deixados para o Apêndice. Gerando 80 estados aleatórios, comparamos os valores das medidas  $C$  e  $M$  (onde para este último, usamos o procedimento descrito no Apêndice). Precisamos frisar que  $C$  é uma autêntica medida de emaranhamento, ao passo que  $M$  falha no teste de invariância por transformações de base. No entanto, é instrutivo observar como ambas se comportam (para o cálculo sendo feito na mesma base).

A Fig. 4.1 apresenta os valores das duas medidas para nossos 80 estados aleatórios. O valor de  $M$  foi usado como parâmetro crescente na disposição dos estados no eixo horizontal do gráfico. Na Fig. 4.2 temos os mesmos estados, mas desta vez organizados de acordo com  $C$ . Como podemos observar, os estados não se ordenam da mesma forma. Mas para sistemas bipartidos de qubits as medidas  $C$  e  $D$  são mutuamente monotônicas. Assim, concluímos que as medidas  $D$  e  $M$  — baseadas em distância e para a situação mais simples possível (o caso de dois qubits) — não são equivalentes na classificação de grau de emaranhamento (embora mais uma vez apontamos que  $M$  deve ser considerada com cautela com respeito a quantificar emaranhamento).

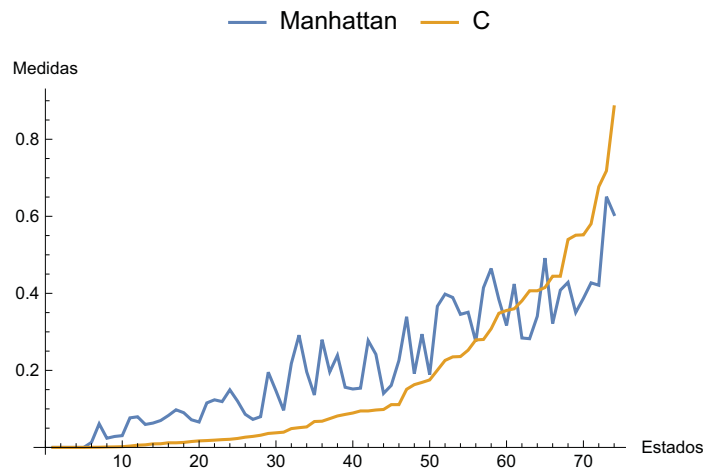


Figura 4.1: Gráfico comparando o valor de emaranhamento segundo os critérios  $C$  e  $M$  para 75 estados reais aleatórios. Os estados são dispostos no eixo horizontal conforme seus valores crescentes de  $M$ .

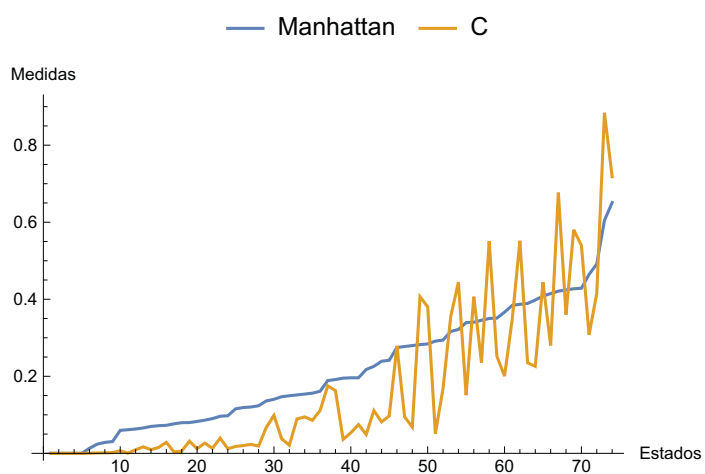


Figura 4.2: O mesmo que a Fig. 4.1, só que ordenando com valores crescentes de  $C$ .



# Propostas de medidas de grau de interdependência entre partes de um sistema quântico

## 5.1 Algumas considerações interpretativas sobre grau de emaranhamento

Até o presente momento, nesta tese, temos nos dedicado a aspectos matemáticos e operacionais de correlações quânticas, em especial de emaranhamento. Entretanto, neste capítulo gostaríamos de discorrer um pouco mais sobre certas questões conceituais associadas à idéia de emaranhamento.

Para ilustrar a discussão, considere a situação particular de  $N = 3$  partes ou subsistemas, cada parte com dimensão  $d_j + 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ), descrita pelo estado

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{n_1=d_1, n_2=d_2, n_3=d_3} c_{n_1 n_2 n_3} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \neq |\phi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle. \quad (5.1)$$

Como já mencionado anteriormente,  $|\psi\rangle$  não indica apenas ausência de informação precisa sobre em quais estados individuais —  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  — os subsistemas 1, 2 e 3 efetivamente se encontram. O estado  $|\psi\rangle$  é de fato dado pela “ocupação simultânea” (algo, porém, difícil de intuir em termos clássicos) de distintas configurações para as três partes, cada uma representada por  $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle$ .

Também, por  $|\psi\rangle$  não poder ser fatorado na forma  $|\phi\rangle$ , temos que os subsistemas não são independentes. O sistema global é uma entidade única, tal que manipulações em uma parte tem influência direta nas outras. Isto quer dizer que se medíssemos, digamos, o subsistema 1, iríamos reduzir (ou “colapsar”) a porção do estado global descrevendo 2 e 3, consequentemente diminuindo o número de  $|n_j\rangle$ ’s simultâneos possíveis para as partes 2 e 3. Num certo sentido, isto representa diminuir a incerteza do que se esperar em medições posteriores para 2 ou 3, apontando para uma forte correlação (de origem exclusivamente quântica) nas configurações de cada parte.

Para um exemplo mais concreto, suponha que para os subsistemas  $j = 1, 2, 3$  acima, todos de dimensão 5 (ou seja,  $n_j = 0, \dots, 4$ ), temos  $|\psi\rangle$  especificamente escrito como ( $|c_{111}|^2 + |c_{344}|^2 + |c_{212}|^2 + |c_{233}|^2 = 1$ )

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & c_{111} |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |1_3\rangle + c_{344} |3_1\rangle \otimes |4_2\rangle \otimes |4_3\rangle \\ & + c_{212} |2_1\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |2_3\rangle + c_{233} |2_1\rangle \otimes |3_2\rangle \otimes |3_3\rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sem entrarmos em detalhes sobre como medições seriam implementadas para inferir apenas  $j = 1$  ( $\mathbf{m}_1$ ), se achássemos  $n_1 = 2$ , poderíamos ter

$$|\psi\rangle_{\mathbf{m}_1=2} = |2_1\rangle \otimes (c_{12} |1_2\rangle \otimes |2_3\rangle + c_{33} |3_2\rangle \otimes |3_3\rangle), \quad (5.3)$$

com  $|c_{12}|^2 + |c_{33}|^2 = 1$  (e também  $|c_{12}|^2/|c_{33}|^2 = |c_{212}|^2/|c_{233}|^2$ , supondo que o estado resultante de uma medição é dado por  $\hat{P}_j|\psi\rangle/||\hat{P}_j|\psi\rangle||$ , com  $\hat{P}_j$  o projetor apropriado). Por outro lado, se achássemos  $n_1 = 1$ , então

$$|\psi\rangle_{\mathbf{m}_1=1} = |\phi\rangle = |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle \otimes |1_3\rangle. \quad (5.4)$$

Podemos notar que no primeiro caso, Eq. (5.3), o estado resultante ainda apresenta emaranhamento, e qualquer medição posterior, tanto de  $j = 2$  quanto de  $j = 3$ , fará o sistema finalmente colapsar para um estado separável, com os subsistemas independentes. Já no segundo, Eq. (5.4), o estado final já está fatorado, e portanto não apresenta emaranhamento.

Por último, observamos que se para o estado inicial, Eq. (5.2), tivéssemos  $c_{212} = 0$ , então qualquer medição sobre qualquer parte do sistema necessariamente resultaria num estado separável.

Das distintas situações acima, uma pergunta pertinente é o significado físico de termos um sistema com mais ou menos emaranhamento. Por exemplo, quem deveria apresentar maior emaranhamento,  $|\psi\rangle$  na Eq. (5.2) com  $c_{212} \neq 0$  ou com  $c_{212} = 0$ ? Uma vez que em muitos casos, medidas  $\mu$  propostas na literatura não ordenam o grau de emaranhamento da mesma forma [39, 119–121], dado o presente estado da arte do estudo de emaranhamento, não há uma resposta única para a questão aqui levantada. Refletindo tal diversidade de medidas, diferentes interpretações conceituais do que significa *quantidade de emaranhamento* são possíveis, dependendo das aplicações e contextos considerados.

Em um excelente trabalho dando um panorama geral sobre emaranhamento, o autor de [122] aponta basicamente duas frentes (a primeira subdividida em dois períodos) no estudo do assunto. Primeira frente, primórdios: compreende a primeira constatação teórica (mas com fortes críticas sobre sua significação) de que a mecânica quântica permite correlação direta entre partes — mesmo que espacialmente bastante afastadas — de um sistema, eventualmente através de ações instantâneas a distância [10] (EPR); passando por propostas de interpretações da mecânica quântica para explicar tal fenômeno (como a resposta de Bohr [12] a EPR); o surgimento do conceito de emaranhamento, proposto

por Schrödinger [11]; culminando no reconhecimento de distintas situações (ao menos em teoria) de como isto poderia ser observado, como por exemplo considerando-se spins de partículas correlacionadas ou polarização de fótons (como proposto por David Bohm [44]). Ainda na primeira frente, constatação experimental: inicia-se com a proposta por J. Bell [14] de desigualdades a serem observadas em funções de correlação para testar a idéia de realismo local, confrontando-a com a mecânica quântica; surgimento de correlações melhor talhadas para implementação experimental (a exemplo de CHSC [15]); primeiras confirmações empíricas do fenômeno de emaranhamento e continuadas análises em laboratório [16–21]; finalmente atingindo a maturidade, com experimentos extremamente precisos e que resolvem de vez certos pontos técnicos importantes, demonstrando o fenômeno de forma irrefutável [51, 52].

Nesta frente, o interesse é mais fundamental, tentando entender o caráter não-local da mecânica quântica e como, no mundo microscópico, a manipulação (por exemplo, por medições) de uma simples parte pode determinar o comportamento do todo. Se o grau de interdependência de um subsistema em relação aos outros (determinar a parte  $A$  leva a uma grande quantidade de informação sobre a parte  $B$ ) fosse o fator preponderante para quantificar emaranhamento, a princípio se esperaria que, em nosso exemplo particular anterior, o estado  $|\psi\rangle$  na Eq. (5.2) com  $c_{212} = 0$  deveria ser tomado como o estado mais emaranhado. Veremos que esse nem sempre é o caso.

A segunda frente, que não faz parte do escopo principal da presente tese, está intimamente relacionada com o advento de comunicação quântica e computação quântica. De fato, a descoberta de que emaranhamento é talvez o efeito mais importante para se processar informação (a partir da dinâmica quântica [122]), levou o estudo de emaranhamento a um outro estágio de interesse. Emaranhamento, visto como um “recurso” [123] para armazenar e manipular informação [35, 45, 124], poderia ser então caracterizado com tal perspectiva em mente: estados  $|\psi\rangle$  com maior emaranhamento seriam ainda aqueles englobando forte correlação entre suas partes, porém também permitindo “exploração” (por exemplo, através de manipulações locais sucessivas, resultando em um  $|\psi\rangle_f$ ) com a preservação de um certo grau de emaranhamento ao final do processo.

Das considerações acima, fica clara a legitimidade da indagação sobre como entender o ordenamento imposto por diferentes medidas  $\mu$ , e se essas medidas caracterizam satisfatoriamente o grau com que medições locais podem afetar as outras partes de um sistema, e a informação que podemos adquirir a partir dessas medições. A isso damos o nome de interdependência entre partes de um sistema. Iremos explorar essa questão com o auxílio de dois estados emblemáticos nas duas seções a seguir.

## 5.2 Propriedades de dois estados paradigmáticos

Tomando a base ortonormal gerada pelos autovetores  $\{|0_j\rangle, |1_j\rangle\}$ , vamos considerar dois estados de quatro qubits ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), dados por

$$|\psi_{GHZ_4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle + |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle) \quad (5.5)$$

e

$$|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2\rangle + |1_1 1_2\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3 0_4\rangle + |1_3 1_4\rangle). \quad (5.6)$$

O estado  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  constitui um estado GHZ generalizado, enquanto o estado  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  representa a multiplicação tensorial de dois estados de Bell. Iremos nos referir a  $j$ -ésima parte de cada sistema como  $P_j$ .

Para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , notamos que todas as  $P_j$ 's estão correlacionadas entre si. Não é possível reescrever  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  como a soma de produtos tensoriais de outras combinações de estados para o presente conjunto de quatro subsistemas. Além disso, se fizéssemos uma medição em  $P_1$ , utilizando para esta medição a presente base, e se este subsistema se colapsasse no autoestado  $|0_1\rangle$  (supondo também que teríamos acesso ao resultado dessa medição hipotética), saberíamos que os outros três subsistemas também estariam colapsados nos autoestados  $|0_2\rangle$ ,  $|0_3\rangle$  e  $|0_4\rangle$ , respectivamente. Obtendo  $|1_1\rangle$  para  $P_1$ , saberíamos necessariamente que as outras partes estariam em  $|1_2\rangle$ ,  $|1_3\rangle$  e  $|1_4\rangle$ . Situação totalmente análoga ocorreria se a medição fosse feita em outro subsistema  $P_j$ . Observamos assim que uma medição feita em qualquer parte de nosso sistema GHZ causa o colapso do estado inteiro, tornando-se um estado separável e sem superposição, cada  $P_j$  estando em um autoestado específico.

Já para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ , as  $P_j$ 's não são todas correlacionadas, isto acontecendo apenas aos pares,  $P_1$  com  $P_2$  e  $P_3$  com  $P_4$ . Portanto, podemos escrever

$$|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle = |\psi_{Bell_{1,2}}\rangle \otimes |\psi_{Bell_{3,4}}\rangle, \quad (5.7)$$

com  $|\psi_{Bell_{k,l}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_k 0_l\rangle + |1_k 1_l\rangle)$ . Desta forma, ações feitas em  $P_1$  ou  $P_2$  afetarão apenas  $|\psi_{Bell_{1,2}}\rangle$ , com  $|\psi_{Bell_{3,4}}\rangle$  permanecendo inalterado, e vice-versa. Se, por exemplo, uma medição fosse feita em  $P_1$ , de modo que este colapsasse no autoestado  $|0_1\rangle$ ,  $P_2$  também colapsaria, passando a ser representado pelo autoestado  $|0_2\rangle$ . Os subsistemas  $P_3$  e  $P_4$ , entretanto, não seriam afetados, continuando a ser representados por  $|\psi_{Bell_{3,4}}\rangle$ . Saberíamos tanto sobre esses dois subsistemas após a medição, quanto sabíamos antes de mesma. Em conclusão, após medirmos  $j = 1$  ou  $j = 2$  ( $j = 3$  ou  $j = 4$ ),  $|\psi\rangle_f$  ainda apresentará emaranhamento e superposição com relação às partes  $j = 3$  e  $j = 4$  ( $j = 1$  e  $j = 2$ ).

Antes de prosseguirmos, é importante esclarecer dois pontos sobre o raciocínio desenvolvido acima. Primeiro, sempre que cogitamos que uma medição hipotética seja feita, assumimos tanto que essa medição seja em apenas uma parte do sistema, e portanto local, e que o resultado desta seja conhecido por nós. Quando o resultado da medição, realizada

sobre um estado puro, não puder ser determinado (*a posteriori*), precisamos escrever o estado final como a soma dos possíveis estados resultantes associados ao colapso, isto é, como o estado misto  $\rho = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ , onde  $|\phi_n\rangle$  representa os possíveis estados em que o sistema pode se colapsar, e  $p_n$  a probabilidade de obtermos tal estado no processo de medição (com  $\sum_n p_n = 1$ ).

Segundo, chamamos atenção para o fato de que, na análise apresentada, supusemos as medições feitas com relação a observáveis correspondentes à base na qual o estado está inicialmente escrito. Porém, se isto não for o caso, alguns novos aspectos aparecem. Vamos reanalisar o estado  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , discutindo como medições feitas em  $P_1$  podem afetar o restante do estado global. Contudo, queremos olhar a observável  $X_1$ , cuja base apropriada são os autovetores  $\{|+1\rangle, |-1\rangle\}$ , e para os quais

$$|+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle + |1_1\rangle), \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle - |1_1\rangle). \quad (5.8)$$

Fazendo essa mudança de base no estado GHZ original, temos

$$|\psi_{GHZ_4}\rangle = \frac{1}{2}|+1\rangle(|0_2 0_3 0_4\rangle + |1_2 1_3 1_4\rangle) + \frac{1}{2}|-1\rangle(|0_2 0_3 0_4\rangle - |1_2 1_3 1_4\rangle). \quad (5.9)$$

Sabemos que uma medida  $\mu$  de emaranhamento não vai mudar seu valor por reescrevermos  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  como acima. Também, como todas as  $P_j$  permanecem correlacionadas entre si, a medição de uma continuará afetando todas as outras. Entretanto, o modo como o colapso (devido a uma medição sobre uma parte) afetará o resto do estado difere de nosso exemplo original. Se soubéssemos que o primeiro subsistema encontra-se, por exemplo, no autoestado  $|+1\rangle$ , poderíamos afirmar que os outros três subsistemas serão descritos por  $|\psi_{GHZ_3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_2 0_3 0_4\rangle + |1_2 1_3 1_4\rangle)$ . Assim, se antes uma única medição em  $P_1$  bastaria para totalmente transformar o estado inicial em um único produto de autoestados dos  $P_j$ 's (ou seja, sem superposição), agora o mesmo não acontece. As partes  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  permanecem emaranhadas e ainda não temos informação total sobre seus estados individuais.

Desta forma (como sabemos que deveria ser), ao se fazer uma medição em uma parte de um sistema, o modo como o estado global se altera, a mudança no emaranhamento do sistema, e a informação que esse estado colapsado passa a fornecer, dependem da observável, ou tecnicamente da base, na qual a medição é feita.

### 5.3 Comparações entre graus de emaranhamento de distintas medidas para dois estados paradigmáticos

Dadas nossas considerações na seção anterior, aqui vamos calcular o grau de emaranhamento para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  e  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ , usando a medida de distância,  $C$  e a generalização da entropia linear, e discutir os resultados.

### Distância

Começamos relembando que a medida da distância para um estado  $|\psi\rangle$  é definida por  $D(|\psi\rangle) = \sqrt{d_2(|\psi\rangle)}$ , onde (assumindo sempre que  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  são normalizados)

$$\begin{aligned} d_2(|\psi\rangle) &= \text{Min}_{|\phi\rangle \text{ separável}} ||\psi\rangle - |\phi\rangle||^2 \geq 0 \\ &= \text{Min}_{|\phi\rangle \text{ separável}} \left( 2 - \langle\psi|\phi\rangle - \langle\phi|\psi\rangle \right) \\ &= 2 \text{Min}_{|\phi\rangle \text{ separável}} \left( 1 - \text{Re}[\langle\psi|\phi\rangle] \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Agora vamos considerar um caso especial. Suponha  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  e que  $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \in \mathcal{H}$ , com  $|\psi_C\rangle \in \mathcal{H}_C$  (para  $C$  sendo  $A$  ou  $B$ ). Assim, não é difícil de perceber que para a medida da distância, devemos procurar por estados separáveis da forma  $|\phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ , onde  $|\phi_C\rangle$  é separável. Voltando portanto à Eq. (5.10), devemos ter

$$\begin{aligned} d_2(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) &= \text{Min}_{|\phi_A\rangle, |\phi_B\rangle \text{ separáveis}} \left( 2 - \langle\psi_A|\phi_A\rangle \langle\psi_B|\phi_B\rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle\phi_A|\psi_A\rangle \langle\phi_B|\psi_B\rangle \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

O estado separável (ou seja, não emaranhado) mais geral possível para um sistema de  $N$  qubits pode ser escrito como ( $0 \leq \rho_n \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha_n, \beta_n < 2\pi$ ,  $n = 1, \dots, N$ )

$$|\phi\rangle = \bigotimes_{n=1}^{n=N} \exp[i\alpha_n] \left( \sqrt{\rho_n} |0_n\rangle + \sqrt{1 - \rho_n} \exp[i\beta_n] |1_n\rangle \right), \quad (5.12)$$

que para  $s_n = 0$  ou  $1$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$  e os coeficientes de  $|0_n\rangle$  e  $|1_n\rangle$  dados de forma geral como  $\sqrt{s_n + (-1)^{s_n} \rho_n} \exp[i s_n \beta_n]$ , fica

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \exp[i\alpha] \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N=0}^{s_1, s_2, \dots, s_N=1} \sqrt{(s_1 + (-1)^{s_1} \rho_1) \times \dots \times (s_N + (-1)^{s_N} \rho_N)} \\ &\quad \times \exp[i(s_1 \beta_1 + \dots + s_N \beta_N)] |s_1\rangle \otimes \dots \otimes |s_N\rangle. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Temos então que para nossos estados dados pelas Eqs. (5.5) e (5.6), a aplicação respectiva das Eqs. (5.10) e (5.11) resulta em ( $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_4$ )

$$\begin{aligned} d_2(|\psi_{GHZ_4}\rangle) &= 2 - \sqrt{2} \text{Max}_{\rho_n, \alpha, \beta} \left( \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} \cos[\alpha] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)(1 - \rho_3)(1 - \rho_4)} \cos[\alpha + \beta] \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

e  $(\beta_A = \beta_1 + \beta_2, \beta_B = \beta_3 + \beta_4)$

$$\begin{aligned} d_2(\psi_{Bell \otimes Bell}) = & 2 - \text{Max}_{\rho_n, \alpha, \beta_C} \left( \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} \cos[\alpha] \right. \\ & + \sqrt{\rho_1 \rho_2 (1 - \rho_3)(1 - \rho_4)} \cos[\alpha + \beta_B] \\ & + \sqrt{\rho_3 \rho_4 (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)} \cos[\alpha + \beta_A] \\ & \left. + \sqrt{(1 - \rho_1)(1 - \rho_2)(1 - \rho_3)(1 - \rho_4)} \cos[\alpha + \beta_A + \beta_B] \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Acima temos expressões na forma  $2 - c \text{Max}[\cdot]$ . Para que  $[\cdot]$  seja máximo, temos que ter  $\alpha$  e os  $\beta$ 's tais que  $\cos[\alpha] = \cos[\alpha + \beta_C] = \cos[\alpha + \beta] = 1$ . Da mesma forma, os  $\rho_n$  tem que ser tais que os termos  $[\cdot]$  resultantes também sejam máximos. Uma análise relativamente simples de tal imposição para os  $\rho_n$ 's leva finalmente a  $d_2(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858$  ou  $D(|\psi_{GHZ_4}\rangle) \approx 0.7654$  e  $d_2(|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle) = 1$ .

### Medida $C$

No cap. 3 apresentamos em detalhes a medida  $C$ . Para um estado puro de 4 qubits, escrito como  $|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4=0}^1 c_{n_1 n_2 n_3 n_4} |n_1 n_2 n_3 n_4\rangle$ , temos (aqui o termo de normalização dá 1, logo não será mostrado)

$$C = \sum_{j=1}^4 \sum_{n_j, n'_j} \sum_{I_j, I'_j}^{n_j \neq n'_j, I_j \neq I'_j} |c_{n_1 \dots n_j \dots n_4} c_{n'_1 \dots n'_j \dots n'_4} - c_{n_1 \dots n'_j \dots n_4} c_{n_1 \dots n_j \dots n'_4}|^2, \quad (5.16)$$

onde  $I_j$  representa o conjunto de índices  $\{n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_4\}$ , estando o índice  $n_j$  ausente. Além disso, os termos gerados com os pares  $\{n_j, n'_j\}$  ou  $\{I_j, I'_j\}$  são contados apenas uma vez, independente da ordem dos índices.

Para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle + |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle)$ , os termos diferentes de 0 são

$$\begin{aligned} |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{0111} \cdot c_{1000}|^2 &= 1/4, \\ |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{1011} \cdot c_{0100}|^2 &= 1/4, \\ |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{1101} \cdot c_{0010}|^2 &= 1/4, \\ |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{1110} \cdot c_{0001}|^2 &= 1/4, \end{aligned} \quad (5.17)$$

de modo que  $C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1$ .

Já para  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2\rangle + |1_1 1_2\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3 0_4\rangle + |1_3 1_4\rangle)$ , os termos diferentes

de 0 são em número bem maior, dados por

$$\begin{aligned}
 |c_{0000} \cdot c_{1100} - c_{0100} \cdot c_{1000}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{0111} \cdot c_{1000}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0100} \cdot c_{1011} - c_{0011} \cdot c_{1100}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0011} \cdot c_{1111} - c_{0111} \cdot c_{1011}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{1100} - c_{1000} \cdot c_{0100}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{1011} \cdot c_{0100}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{1000} \cdot c_{0111} - c_{0011} \cdot c_{1100}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0011} \cdot c_{1111} - c_{1011} \cdot c_{0111}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{0011} - c_{0001} \cdot c_{0010}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{1101} \cdot c_{0010}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0001} \cdot c_{1110} - c_{1100} \cdot c_{0011}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{1100} \cdot c_{1111} - c_{1101} \cdot c_{1110}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{0011} - c_{0010} \cdot c_{0001}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0000} \cdot c_{1111} - c_{1110} \cdot c_{0001}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{0010} \cdot c_{1101} - c_{1100} \cdot c_{0011}|^2 &= 1/16 \\
 |c_{1100} \cdot c_{1111} - c_{1110} \cdot c_{1101}|^2 &= 1/16,
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

tal que  $C(\psi_{Bell \otimes Bell}) = 1$ .

### Generalização da média de entropia linear, caso $n = 2$ , $R_E^{(2)}(\rho)$

Vimos no Capítulo 2 (Seção 2.3.3) a medida  $R_E^{(n)}(\rho)$  [87]. O parâmetro  $n$  representa o tamanho das partições a serem usadas para subdividir um estado de  $N$  subsistemas, e assim fazermos a média da entropia linear entre todas as composições possíveis com  $n$  partes e o restante do estado. É importante lembrar que  $R_E^{(1)}$  é equivalente à medida  $C$ .

Aqui iremos calcular  $R$  utilizando partições com  $n = 2$ , algo natural, uma vez que nosso estado de dois Bells corresponde justamente a correlações aos pares. O caso com  $n = 3$  não será calculado por ser idêntico ao caso com  $n = 1$  (para uma situação com quatro partes, escolher três delas e escolher uma são situações equivalentes). Para um sistema de 4 partes  $P_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), devemos calcular a entropia linear entre partições  $\{P_k, P_l\}$  e  $\{P_r, P_s\}$ , com  $k \neq l \neq r \neq s$  assumindo valores entre 1 e 4. Da média entre todos os valores obtidos, temos o valor de  $R$ . Logo,  $R_E^{(2)}(\rho)$  para sistemas de 4 partes, com partições de 2 partes, é dado por

$$R_E^{(2)}(\rho) = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 G(2, l), \tag{5.19}$$



com

$$G(2, l) = \frac{4}{3} \left[ 1 - \frac{1}{4-l} \sum_{k=1}^{4-l} \text{Tr}(\rho_{k, k+l}^2) \right]. \quad (5.20)$$

Começaremos com  $R_E^{(2)}(\rho_{GHZ_4})$ , onde  $\rho_{GHZ_4} = |\psi_{GHZ_4}\rangle\langle\psi_{GHZ_4}|$ . Inicialmente iremos calcular a entropia linear entre as partes  $\{P_1, P_2\}$  e  $\{P_3, P_4\}$ . Para isso, precisamos de  $\rho_{1,2}^{GHZ_4} = \text{Tr}_{3,4} \rho^{GHZ_4}$ , para os subscritos referindo-se às partes do estado. Temos

$$\rho_{1,2}^{GHZ_4} = \frac{1}{2} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2} |11\rangle\langle 11|, \quad (5.21)$$

então

$$(\rho_{1,2}^{GHZ_4})^2 = \frac{1}{4} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{4} |11\rangle\langle 11|, \quad (5.22)$$

com  $\text{Tr}(\rho_{1,2}^{GHZ_4})^2 = 1/2$ .

Por simetria do estado, as matrizes densidade para as outras partições possíveis são semelhantes, com  $\text{Tr}(\rho_{r,s}^{GHZ_4})^2 = 1/2$  para qualquer  $r \neq s$ . Com isso encontramos  $G(2, 1) = G(2, 2) = G(2, 3) = 2/3$ . Finalmente  $R_E^{(2)}(\rho^{GHZ_4}) = 2/3$ .

Realizaremos o mesmo procedimento para  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$ . Para a partição  $\{P_1, P_2\}$  temos

$$\rho_{1,2}^{Bell \otimes Bell} = \frac{1}{2} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2} |00\rangle\langle 11| + \frac{1}{2} |11\rangle\langle 00| + \frac{1}{2} |11\rangle\langle 11|. \quad (5.23)$$

Tomando o quadrado desse operador densidade reduzido, encontramos

$$(\rho_{1,2}^{Bell \otimes Bell})^2 = \frac{1}{2} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2} |00\rangle\langle 11| + \frac{1}{2} |11\rangle\langle 00| + \frac{1}{2} |11\rangle\langle 11|. \quad (5.24)$$

Com isso, obtemos  $\text{Tr}[(\rho_{1,2}^{Bell \otimes Bell})^2] = 1$ . O resultado é idêntico para  $\rho_{3,4}^{Bell \otimes Bell}$ .

Iremos tratar agora da partição  $\{P_1, P_3\}$ . Começamos calculando o operador densidade reduzido  $\rho_{1,3}^{Bell \otimes Bell}$ , ou

$$\rho_{1,3}^{Bell \otimes Bell} = \frac{1}{4} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{4} |10\rangle\langle 10| + \frac{1}{4} |01\rangle\langle 01| + \frac{1}{4} |11\rangle\langle 11|. \quad (5.25)$$

Assim

$$(\rho_{1,3}^{Bell \otimes Bell})^2 = \frac{1}{16} |00\rangle\langle 00| + \frac{1}{16} |10\rangle\langle 10| + \frac{1}{16} |01\rangle\langle 01| + \frac{1}{16} |11\rangle\langle 11|, \quad (5.26)$$

e portanto  $\text{Tr}[(\rho_{1,3}^{Bell \otimes Bell})^2] = 1/4$ . De maneira semelhante

$$\text{Tr}[(\rho_{1,3}^{Bell \otimes Bell})^2] = \text{Tr}[(\rho_{1,4}^{Bell \otimes Bell})^2] = \text{Tr}[(\rho_{2,3}^{Bell \otimes Bell})^2] = \text{Tr}[(\rho_{2,4}^{Bell \otimes Bell})^2], \quad (5.27)$$

todos dando  $1/4$ .

Utilizando o traço do quadrado dos operadores densidade, podemos obter  $G(2, l)$  (Eq. 5.19) para  $|\rho^{Bell \otimes Bell}\rangle$ , com  $G(2, 1) = 1/3$  e  $G(2, 2) = G(2, 3) = 1$ . Dessa maneira, da Eq. (5.20), temos  $R_E^{(2)}(\rho^{Bell \otimes Bell}) = 7/9$ .

### Discussão

A medida da distância fornece a norma da diferença entre um estado de interesse e o estado fatorado mais próximo a este. É uma medida de emaranhamento, que se foca mais nos aspectos geométricos do sistema. Fornece  $D(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 0.7654$  e  $D(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 1$ , resultando num GHZ por volta de 24% menor. A medida  $R_E^{(n)}(\rho)$ , ao tomarmos  $n = 2$  (uma escolha apropriada dado nossos estados de análise) leva a  $R_E^{(2)}(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 2/3$  e  $R_E^{(2)}(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 7/9$ , então com um GHZ em torno de 15% menor.

A medida  $R_E^{(n)}(\rho)$  (ver seção 2.56) calcula emaranhamento de estados puros multipartidos ao fazer a média da entropia linear entre divisões contendo  $n$  subsistemas e o estado completo [87]. Ao tomarmos  $n = 2$  (uma escolha apropriada dado nossos estados de análise) obtemos com ela  $R_E^{(2)}(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 2/3$  e  $R_E^{(2)}(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 7/9$ , então com um GHZ em torno de 15% menor. Desta forma, ao caracterizar com maior emaranhamento um estado em que há mais cópias de estados emaranhados, está relativamente alinhada com a proposta de entender emaranhamento como um recurso.

Por último,  $C$  fornece o mesmo valor para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  e  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ . Assim, melhor balanceando as duas maneiras aqui apresentadas de interpretar emaranhamento, mas certamente não dando maior peso para a existência de um maior número de interdependências entre diferentes partes de um sistema, o que seria o caso de  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ .

Dessa forma, temos evidências de que medidas tradicionais de emaranhamento talvez não sejam apropriadas para medir o que tomamos como o grau de interdependência entre partes de um sistema quântico (outras características de medidas de emaranhamento que as tornam inaptas para tal tarefa serão mencionadas ao longo do trabalho). Sendo assim, iremos, na próxima seção, iniciar o desenvolvimento de propostas para caracterizar tal aspecto de sistemas.

## 5.4 Medida de grau de interdependência entre partes de um sistema

Guiados pelas discussões prévias (no espírito da primeira frente no estudo de emaranhamento) e talvez em maior conexão com os primórdios da área, propomos a seguir uma medida de grau de interdependência entre partes de um sistema. Nossa idéia segue um ponto de vista recente de investigar de forma mais ampla diferentes manifestações de correlações quânticas (ver, por exemplo, o excelente trabalho de revisão em [42]).

Temos que para um dado  $|\psi\rangle$  emaranhado, inferindo-se um de seus subsistemas, através de uma medição local, afetamos em diferentes graus os outros subsistemas, e adquirimos certa informação sobre os possíveis estados desses outros subsistemas e expectativas de resultados de medições posteriores. Queremos então uma medida que estime tal propriedade (por exemplo, sendo máxima para estados GHZ). As medidas usuais de emaranhamento certamente quantificam, em algum grau, este aspecto. Entretanto, como visto acima, não o destacam de forma acentuada. Chamaremos nossa classe de grandezas (ver a seguir) de  $\mathbb{F}$ . Iremos definir  $\mathbb{F}$  como uma função de estados puros  $|\psi\rangle$  multipartidos, cujas partes tenham subespaços de Hilbert de dimensões arbitrárias contáveis. São exigidas duas condições:

- $\mathbb{F}(\cdot)$  real com  $\mathbb{F}(\cdot) \geq 0$ .
- $\mathbb{F}(|\phi_{sep}\rangle) = 0$ , com  $|\phi_{sep}\rangle$  não emaranhado.

A primeira condição se deve ao fato de que ao interferir localmente com um sistema, ou ele afeta os outros ou não. Um valor negativo de interdependência, assim, careceria de significado físico. A segunda condição advém do fato de que estados separáveis não afetam uns aos outros devido a ações locais, de maneira que a interdependência entre suas partes deva ser nula.

Como ilustrado na seção 5.2 (ver, por exemplo, Eq. (5.9)), a possibilidade de com uma medida (ou poucas) termos  $|\psi\rangle \rightarrow |\phi_{sep}\rangle$  — indicando forte interdependência entre as partes do sistema — depende das observáveis a serem consideradas. Portanto, podemos esperar diferentes valores de  $\mathbb{F}$  para distintos conjuntos de medidas. Com isto, não iremos impôr como restrição que  $\mathbb{F}$  seja invariante por transformações locais de base.

Assim, é importante frisar que o que sugerimos não é uma medida usual de emaranhamento. Uma vez que grandezas relacionadas com o processo específico de medida (logo de base) não são monotônicas sob LOCC, então não podem ser encaradas como medidas de emaranhamento [55]. O que pretendemos caracterizar, ao invés, é o grau de interdependência das partes do estado, ou seja, como, através de medições locais, afetamos em maior ou menor grau as outras partes de um estado, podendo ganhar maior ou menor conhecimento a respeito dos subsistemas não aferidos.

#### 5.4.1 Estados relativos

Vamos supor um sistema com um número  $N$  de partes, denotadas  $P_n$ , descrito por um estado  $|\psi\rangle$  pertencente ao espaço de Hilbert  $H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$ . Para manter o exemplo simples, vamos supor que cada subespaço de Hilbert  $H_n$  possui dimensão  $d_{H_n} = 3$ , gerado por uma base  $\{|1_n\rangle, |2_n\rangle, |3_n\rangle\}$ . De forma genérica,  $|\psi\rangle$  pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = |1_1\rangle \otimes |\psi^{11}\rangle + |2_1\rangle \otimes |\psi^{21}\rangle + |3_1\rangle \otimes |\psi^{31}\rangle. \quad (5.28)$$

onde  $|\psi^{k1}\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert  $H_2 \otimes \dots \otimes H_N$ . Na Eq. (5.28), os autovetores associados ao subsistema 1 estão colocados em evidência. Dizemos que  $|\psi^{11}\rangle$  é o estado relativo de  $|\psi\rangle$  à  $|1_1\rangle$ , e assim por diante. Note que o estado relativo  $|\psi^{k1}\rangle$  (aqui  $k = 1, 2, 3$ ) descreve (a menos de uma normalização) qual seria a configuração dos demais subsistemas se soubéssemos que o primeiro está no autoestado  $|k_1\rangle$ . Evidentemente, similar decomposição poderia ser feita tomando-se qualquer subsistema  $n$ .

De forma geral, dado  $|\psi\rangle$  cuja  $n$ -ésima parte tenha dimensão  $d_n$  e seja descrita em uma base  $\{|1_n\rangle, \dots, |d_n\rangle\}$ , então podemos escrever

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{d_n} |k_n\rangle \otimes |\psi^{k_n}\rangle, \quad (5.29)$$

onde  $|\psi^{k_n}\rangle$  é o estado relativo a  $|k_n\rangle$ . Estados relativos são de fundamental importância

na interpretação de Everett da mecânica quântica [125]. O processo de colapso da função de onda em uma medição é substituído pelo tratamento do observador como um objeto quântico, ele mesmo passível de estar em uma superposição. O observador se emaranha ao objeto que observa, sendo a medição que obtém representada por um dos estados relativos do objeto com relação ao observador (e eventualmente ao resto do mundo). Neste sentido, cada conjunto relativo possui realidade própria. Obviamente que aqui não estamos considerando a interpretação de muitos mundos para a mecânica quântica. Apenas estamos “emprestando” o conceito de estados relativos para abordar a questão: “qual seria o meu sistema quântico se eu soubesse que um dado subsistema está em um dado autoestado?”.

Para que nosso estado relativo represente uma resposta adequada a essa pergunta, e assim útil às nossas necessidades técnicas mais à frente, não o consideraremos como é comumente empregado. Precisamos de um estado com dimensão igual ao  $|\psi\rangle$  original. Logo, ao invés de  $|\psi^{[k_n]}\rangle$ , usaremos o estado relativo multiplicado tensorialmente pelo autoestado ao qual ele é relativo, ou seja  $|k_n\rangle \otimes |\psi^{[k_n]}\rangle$ . É de interesse também que nosso estado seja normalizado. Para isso, fazemos  $|k_n\rangle \otimes |\psi^{[k_n]}\rangle \rightarrow \mathcal{N} |k_n\rangle \otimes |\psi^{[k_n]}\rangle$ , onde

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{\langle \psi^{[k_n]} | \psi^{[k_n]} \rangle}} = \frac{1}{\| |\psi^{[k_n]}\rangle \|}. \quad (5.30)$$

Dessa maneira, escreveremos

$$|\psi^{[k_n]}\rangle = \frac{(|k_n\rangle \langle k_n| \otimes \mathbf{1}_{1,\dots,n-1,n+1,\dots,N})|\psi\rangle}{\| (|k_n\rangle \langle k_n| \otimes \mathbf{1}_{1,\dots,n-1,n+1,\dots,N})|\psi\rangle \|}. \quad (5.31)$$

Relembramos que o quadrado do denominador em Eq. (5.31), que denotaremos por  $p(|k_n\rangle)$ , designa a probabilidade de que o subsistema  $P_n$  colapse no autoestado  $|k_n\rangle$  se uma medição for feita nesse subsistema.

É instrutivo aqui determinar os estados relativos para nossos dois exemplos de estados emaranhados anteriores. Quando aplicamos esse conceito ao estado  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  (Eq. 5.5), encontramos que ( $n = 1, 2, 3, 4$  e  $k = 0, 1$ )

$$|\psi_{GHZ_4}^{[k_n]}\rangle = |k_1 k_2 k_3 k_4\rangle. \quad (5.32)$$

Portanto, os estados relativos são idênticos para todas as partes  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ . Já para o estado  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$  (Eq. 5.6), temos ( $k = 0, 1$ )

$$|\psi_{Bell \otimes Bell}^{[k_1]}\rangle = |\psi_{Bell \otimes Bell}^{[k_2]}\rangle = |k_1 k_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3 0_4\rangle + |1_3 1_4\rangle), \quad (5.33)$$

$$|\psi_{Bell \otimes Bell}^{[k_3]}\rangle = |\psi_{Bell \otimes Bell}^{[k_4]}\rangle = |k_3 k_4\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2\rangle + |1_2 1_2\rangle). \quad (5.34)$$

Observamos que as diferenças apontadas na seção 4.1, entre os estados  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  e  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$ , transparecem acima. Vemos que os estados relativos para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  são todos

autoestados, sem superposição alguma e não emaranhados. Os estados relativos para  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$ , por sua vez, ainda apresentam superposição e continuam emaranhados.

### 5.4.2 Uma expressão para medidas de interdependência

Vamos supor um estado  $|\psi\rangle$  multipartido de  $N$  partes  $(P_1, P_2, \dots, P_N)$ . Se fizermos uma medição local e descobirmos em qual autoestado está a parte  $P_n$  deste sistema (devido ao colapso de  $|\psi\rangle$ ), isto efetivamente pode implicar numa diminuição do número de configurações possíveis para os subsistemas individuais, quando comparamos com o estado inicial descrito por  $|\psi\rangle$ .

Como anteriormente mencionado, em mecânica quântica quando falamos do estado puro  $|\psi\rangle$ , não há sentido em falar na probabilidade de cada conjunto de autoestados para os  $P_n$ 's ser a *configuração verdadeira* do sistema, pois o estado global é a coleção de todos os autoestados compondo  $|\psi\rangle$ . Mas considerando-se inferências experimentais,  $|\psi\rangle$  escrito como a soma de um menor número destes termos, obviamente aumenta a probabilidade de “acerto” de qual configuração específica de autoestados será obtida no final de uma série de medições (quando as mesmas são feitas em relação a observáveis descritas pelas bases assumidas para  $|\psi\rangle$ ). Assim, se levarmos em conta os preceitos fundamentais da teoria quântica e a discussão acima, então podemos falar (no presente contexto) em um aumento de informação sobre um sistema quando temos um eventual colapso (parcial ou total) de seu vetor de estado.

O que queremos determinar com  $\mathbb{F}$  é em que grau a obtenção do conhecimento de em que autoestado está uma parte de um sistema, através de uma medição local, afeta as outras partes deste mesmo sistema, possibilitando ganho condicional de informação a respeito dos outros subsistemas. Mas já vimos que escrever  $|\psi\rangle$  em termos de estados relativos corresponde, em certa medida, a fatorar tal potencial informação. Baumgratz *et al.* [41], ao analisarem como medir a coerência de um estado misto, sugerem definir  $Coer(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho)$ , onde  $\rho$  representa um estado misto,  $\rho_{diag}$  o estado que se obtém ao se eliminar todos os elementos não diagonais de  $\rho$  e  $S$  a entropia de von Neumann. Em analogia, propomos utilizar estados relativos de um estado original  $|\psi\rangle$  como as possibilidades de configurações que esse estado pode assumir após uma medição local, e uma função genérica  $f$  para quantificarmos as mudanças por que passa o estado. Assim, em paralelo com a expressão em [41], temos (sempre supondo uma base apropriada, descrita por  $\{|k_n\rangle\}$  com  $k_n = 0, 1, \dots, d_n - 1$ , na qual medições seriam efetuadas para o subsistema  $P_n$ )

$$\mathbb{F}(|\psi\rangle) = A f(|\psi\rangle) - \sum_{n, k_n} B p(|k_n\rangle) f(|\psi^{|k_n}\rangle). \quad (5.35)$$

Aqui os  $|\psi^{|k_n}\rangle$ 's representam os estados relativos (ver Eq. (5.31)) ao estado total multipartido  $|\psi\rangle$ . O somatório é feito sobre cada autoestado  $|k_n\rangle$  de cada parte  $P_n$  de  $|\psi\rangle$  (o índice  $k_n$  representando os autoestados e  $n$  representando as partes no somatório da equação 5.35), portanto varrendo todos os estados relativos possíveis de  $|\psi\rangle$ .  $p(|k_n\rangle)$  representa a probabilidade do  $n$ -ésimo subsistema do estado colapsar no autoestado  $|k_n\rangle$

(devido a uma eventual medição em  $P_n$ ). Notar que ao multiplicarmos cada  $f(|\psi^{k_n}\rangle)$  por  $p(|k_n\rangle)$ , vinculamos ao estado relativo um peso proporcional à probabilidade de sua obtenção. Assim, se  $f$  representa uma grandeza não negativa associada a  $|\psi\rangle$ , a subtração de um termo proporcional a  $f(|\psi^{k_n}\rangle)$  de certa forma corresponde à diminuição no valor de  $f(|\psi\rangle)$  caso soubéssemos que a  $n$ -ésima parte do estado está no autoestado  $|k_n\rangle$ . As constantes  $A$  e  $B$  são basicamente termos de normalização. Como mostraremos a seguir, seus valores dependerão da escolha de  $f$  e da dimensão do sistema.

Por último, no início da seção 5.4 dissemos que  $\mathbb{F}$  correspondia a uma classe de medidas. Aqui fica claro o porquê disto. Da mesma forma que existe uma grande diversidade de possíveis medidas apropriadas de emaranhamento, distintas escolhas de  $f$  levarão a diferentes formas para  $\mathbb{F}$ . Nesta tese, iremos explorar duas escolhas específicas, que serão discutidas nas próximas seções.

## 5.5 $\mathbb{F}$ cuja função $f$ é dada pela medida $C$

Uma escolha natural para  $\mathbb{F}$ , Eq. (5.35), é termos  $f$  justamente uma medida de emaranhamento  $\mu$ , de maneira que observemos como o emaranhamento de um estado se modifica devido a medições locais. Como vimos na seção 5.3, a medida  $C$ , Eq. (5.35), parece privilegiar um pouco mais os aspectos que desejamos destacar com  $\mathbb{F}$ , assim sendo uma escolha direta. Além disso,  $C$  é uma medida relativamente fácil de calcular para estados puros multipartidos definidos em espaços de Hilbert de dimensão contável. A seguir, para designar  $\mathbb{F}$  com  $f = C$ , iremos usar a notação  $F_C$ .

### 5.5.1 Definição de $F_C$

Seja  $|\psi\rangle = \sum_{k_1, \dots, k_N} c_{k_1, \dots, k_N} |k_1 \dots k_N\rangle$ , um estado normalizado, ou seja,  $\sum_{k_1, \dots, k_N} |c_{k_1, \dots, k_N}|^2 = 1$ . É importante frisar que estamos assumindo um base arbitrária, mas como já discutido, os resultados de  $F_C$  podem depender da escolha específica. Podemos calcular um estado relativo  $|\psi^{k_n}\rangle$  à cada  $|k_n\rangle$  utilizando a Eq. (5.31) (e novamente, tais estados serão dependentes da base considerada). Então temos

$$F_C(|\psi\rangle) = C(|\psi\rangle) - \frac{1}{N} \sum_n \sum_{k_n} p(|k_n\rangle) C(|\psi^{k_n}\rangle). \quad (5.36)$$

Aqui fizemos as escolhas  $A = 1$  e  $B = 1/N$  ( $A = 1$  pois  $C$  já é normalizada, e  $B = 1/N$  resulta numa média apropriada sobre as partes  $n = 1, \dots, N$ ). Notar também que  $\sum_{k_n} p(|k_n\rangle) = 1$ .

Neste momento, um pouco mais de discussão sobre a dependência de  $F_C$  com a base assumida é desejável.  $C(|\psi\rangle)$  é uma medida de emaranhamento monotônica sob LOCC, e portanto, invariante por mudanças da bases locais, ou seja, por transformações unitárias em cada parte  $P_n$ . Entretanto, a seleção de estados relativos será diferente conforme a base em questão. De fato, suponha dois conjuntos de bases  $\{|k_n\rangle\}$  e  $\{|m_n\rangle\}$  para  $P_n$ . Tais bases correspondem aos estados relativos descritos, respectivamente, por  $|\psi^{k_n}\rangle$  e  $|\psi^{m_n}\rangle$ ,

que de forma geral não coincidem. Sabemos que existe uma transformação unitária  $U^{(n)}$  levando  $\{|k_n\rangle\}$  para  $\{|m_n\rangle\}$ . Isto implica que  $C(|\psi\rangle)$  na Eq. (5.36) não muda sob a ação de  $U^{(n)}$ . Mas certamente  $U^{(n)}$  não mapeará  $|\psi^{k_n}\rangle$  em  $|\psi^{m_n}\rangle$  e assim não podemos afirmar que  $C(|\psi^{k_n}\rangle)$  é igual a  $C(|\psi^{m_n}\rangle)$  (e nem que  $p(|k_n\rangle)$  coincide com  $p(|m_n\rangle)$ ). Portanto, via de regra  $F_C$  vai diferir de acordo com a base considerada. Este fato será ilustrado com exemplos a seguir.

Mas como já frisado, nossa medida de interdependência para um estado irá depender de base, pois reflete o quão abrangentemente observáveis de partes do sistema (representadas nesta base) se correlacionam com valores de observáveis de outras partes.  $F_C$  é função não só de  $|\psi\rangle$ , mas também de quais “propriedades” de  $|\psi\rangle$  estamos olhando. Já emaranhamento é uma medida intrínseca, não focando aspectos particulares de um estado ou tendo uma definição conceitual específica (ao invés, é construída em termos de condições matemáticas mínimas). O fato de distintas  $\mu$ 's usualmente não ordenarem estados da mesma forma é, por exemplo, um indício de que não representam *exatamente* a mesma característica geral de  $|\psi\rangle$ .

### 5.5.2 Verificação das condições matemáticas básicas de $F_C$ e sua interpretação

Exigimos duas condições gerais para  $\mathbb{F}$ :

- (i)  $\mathbb{F} \in \mathbb{R}$ , com  $\mathbb{F} \geq 0$ ;
- (ii)  $\mathbb{F}(|\phi_{sep}\rangle) = 0$  para  $|\phi_{sep}\rangle$  separável.

Iremos mostrar que  $F_C(|\psi\rangle)$  respeita essas duas restrições.

Temos que  $C(|\psi\rangle)$  é real para qualquer estado quântico puro  $|\psi\rangle$ . Portanto,  $F_C(|\psi\rangle)$  é claramente real. Como  $C(|\psi\rangle) \geq C(|\psi^{k_n}\rangle)$ , dado que  $|\psi^{k_n}\rangle$  representa uma configuração que  $|\psi\rangle$  pode assumir após uma medição em uma de suas partes, e como  $p(|k_n\rangle) \leq 1$  e  $\sum_{k_n} p(|k_n\rangle) = 1$ , temos que

$$\frac{1}{N} \sum_n \left( \sum_{k_n} p(|k_n\rangle) C(|\psi^{k_n}\rangle) \right) \leq \frac{1}{N} \sum_n C(|\psi\rangle) = C(|\psi\rangle), \quad (5.37)$$

então concluímos que  $F_C(|\psi\rangle) \geq 0$ .

Sabemos que  $C(|\psi\rangle) = 0$  para  $|\psi\rangle$  separável. Assim, basta demonstrar que para  $|\psi\rangle$  separável,  $|\psi^{k_n}\rangle$  também o será. Sendo  $|\psi\rangle$  um estado separável, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle \\ &= (a_0|0_1\rangle + a_1|1_1\rangle + \dots) \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde  $N$  representa o número de partes de  $|\psi\rangle$  e  $|\psi_n\rangle$  o estado individual da parte  $P_n$ . Aqui  $|\psi_1\rangle$  está decomposto em uma soma apropriada de autovetores, ou seja,  $|\psi_1\rangle = \sum_{k=0}^{d_1-1} a_k |k_1\rangle$  com  $\sum_k |a_k|^2 = 1$ . Da Eq. (5.38), temos diretamente que o estado



relativo  $|\psi^{[k_1]}\rangle$  de  $|\psi\rangle$  é dado por

$$|\psi^{[k_1]}\rangle = |k_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (5.39)$$

que é um estado separável. A verificação para as outras partes  $P_n$  do sistema é idêntica. Dessa maneira, temos  $C(|\psi^{[k_n]}\rangle) = 0$  para quaisquer  $k$  e  $n$ , desde que  $|\psi\rangle$  seja separável. Da análise acima segue direto que  $F_C(|\psi\rangle) = 0$  para  $|\psi\rangle$  separável.

Com relação ao comportamento esperado de  $F_C$  (e sua interpretação), comecemos recordando que  $C$  é uma medida de emaranhamento para estados puros. Assim, a princípio  $C(|\psi\rangle)$  nos dá uma medida de quão longe  $|\psi\rangle$  está da situação de separabilidade. Estados separáveis resultam em  $C = 0$ , enquanto para estados emaranhados necessariamente  $C > 0$ , até um máximo de  $C = 1$  (notar que a medida  $C$  é normalizada).

De sua expressão, Eq. (5.36),  $F_C$  genericamente será tanto maior quanto maior for  $C(|\psi\rangle)$  e menores forem os valores dos distintos  $C(|\psi^{[k_n]}\rangle)$ 's. Dessa maneira,  $F_C$  quantifica o quanto, na média, medições locais feitas no estado (na base em que está descrito) destroem o emaranhamento deste. Portanto, altos  $F_C$ 's são obtidos quando  $|\psi\rangle$  for extremamente emaranhado, mas seus estados relativos forem separáveis (ou próximos disto). Notar, desta forma, que temos exatamente a situação que gostaríamos de quantificar com uma medida de grau de interdependência para um estado puro arbitrário. Indo além, dado que estados menos emaranhados são mais separáveis, quanto maior a queda do emaranhamento, mais próximos os subsistemas se tornam de estados puros (e portanto, separáveis), e assim, podemos afirmar que  $F_C$  mede um eventual ganho de informação a respeito dos subsistemas de um estado  $|\psi\rangle$ .

### 5.5.3 Aplicação de $F_C$ a casos de interesse

Aqui iremos aplicar  $F_C$  a alguns casos de interesse com o objetivo de analisar o comportamento dessa grandeza e iluminar sua interpretação. Exploraremos seu comportamento a partir de mudanças de base locais, seu cálculo para os estados  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , Eq. (5.5), e  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$ , Eq. (5.6), e as condições que a maximizam, entre outros aspectos.

#### 5.5.3.0 Mudanças de bases locais

Apontamos anteriormente que não devemos esperar  $F_C$  ser invariante sob mudanças de bases locais. Iremos agora exemplificar e discutir este fato.

Primeiro, podemos calcular  $F_C$  para o estado de quatro qubits  $|\psi_{GHZ_4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle + |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle)$ , onde cada parte  $P_n$  do sistema está escrita na base  $\{|0_n\rangle, |1_n\rangle\}$ . Os estados relativos para qualquer parte  $P_n$  são dados pela Eq. (5.32), ou

$$|\psi_{GHZ_4}^{[0_n]}\rangle = |0_1 0_2 0_3 0_4\rangle, \quad |\psi_{GHZ_4}^{[1_n]}\rangle = |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle.$$

Para obter  $F_C(|\psi_{GHZ_4}\rangle)$ , precisamos do emaranhamento do estado total,  $C(|\psi_{GHZ_4}\rangle)$ , do emaranhamento dos estados relativos,  $C(|\psi_{GHZ_4}^{[k_n]}\rangle)$ , e das probabilidades de se medir cada autoestado  $|k_n\rangle$ ,  $p(|k_n\rangle)$ . Já derivamos, anteriormente, o emaranhamento do estado



$|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , com  $C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1$ . Para qualquer  $n$ , o emaranhamento dos estados relativos será  $C(|\psi_{GHZ_4}^{0n}\rangle) = C(|\psi_{GHZ_4}^{1n}\rangle) = 0$  (dado que todos os estados relativos são separáveis). Temos também  $p(|k_n\rangle) = 1/2$  para qualquer  $|k_n\rangle$ . Logo, chegamos a  $F_C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1$ .

Por outro lado, poderíamos escrever  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  em outra base, por exemplo, caso quiséssemos trabalhar com observáveis rodadas em relação às do GHZ original. Então suponha a mudança de base para a parte  $P_1$ , através da transformação (aqui, por comodidade do leitor, estamos repetindo algumas expressões da seção 5.2)

$$|0_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle + |-1\rangle), \quad |1_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle). \quad (5.40)$$

Utilizando as Eqs. (5.40) acima, podemos reescrever nosso estado GHZ (agora denotado como  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$ ), por

$$\begin{aligned} |\psi'_{GHZ_4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle + |-1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|0_2 0_3 0_4\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|1_2 1_3 1_4\rangle. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Os estados relativos de  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$  para a parte  $P_1$  são dados por

$$|\psi'_{GHZ_4}^{+1}\rangle = |+1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_2 0_3 0_4\rangle + |1_2 1_3 1_4\rangle), \quad (5.42)$$

$$|\psi'_{GHZ_4}^{-1}\rangle = |-1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_2 0_3 0_4\rangle - |1_2 1_3 1_4\rangle). \quad (5.43)$$

Para as partes  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , temos (com  $n = 2, 3, 4$ )

$$|\psi'_{GHZ_4}^{0n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle + |-1\rangle) \otimes |0_2 0_3 0_4\rangle, \quad (5.44)$$

$$|\psi'_{GHZ_4}^{1n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle) \otimes |1_2 1_3 1_4\rangle. \quad (5.45)$$

Dos estados relativos para  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$ , podemos calcular  $C$  para cada um deles. Temos então

$$C(|\psi'_{GHZ_4}^{+1}\rangle) = C(|\psi'_{GHZ_4}^{-1}\rangle) = \frac{3}{4}, \quad (5.46)$$

$$C(|\psi'_{GHZ_4}^{0n}\rangle) = C(|\psi'_{GHZ_4}^{1n}\rangle) = 0. \quad (5.47)$$

Disto segue facilmente o valor de  $F_C$ , ou  $F_C(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) = 0,8125$ .

Começando com  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  e fazendo uma mudança de base local de modo a obter  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$ , observamos uma queda no valor de  $F_C$ , que varia de  $F_C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1$  para  $F_C(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) = 0.825$ . Essa diminuição pode ser justificada observando os estados relativos. Em  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , uma medição local em qualquer parte acaba com todo o emaranhamento, ou seja, a informação parcial de em qual autoestado se encontra qualquer parte  $P_n$  do sistema nos permite prever todos os estados individuais das outras partes. Isto é

evidenciado pelo fato de todos os estados relativos  $|\psi_{GHZ_4}^{[k_n]}\rangle$  serem separáveis e formados por apenas um autoestado de cada  $P_n$ . No entanto, para  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$  isto não é mais o caso: alguns estados relativos ainda possuem emaranhamento. Para as partes  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , continuamos tendo estados relativos totalmente separáveis. Se soubermos, por exemplo, que a parte  $P_2$  está no autoestado  $|0_2\rangle$ , podemos afirmar que  $P_3$  está no autoestado  $|0_3\rangle$  e  $P_4$  em  $|0_4\rangle$ , mas para  $P_1$ , descrito por  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle)$ , ainda temos uma combinação linear de dois autoestados. Além disso, se soubermos que a parte  $P_1$  está no autoestado  $|\pm_1\rangle$ , isso não nos possibilita associar um autoestado único a cada uma das partes  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , que seriam todas descritas por  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_20_30_4\rangle + |1_21_31_4\rangle)$ . Essa diferença, numa perspectiva de aquisição de informação, justifica  $F_C(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) < F_C(|\psi_{GHZ_4}\rangle)$ . Os dois possuem o mesmo emaranhamento inicial, contudo a seleção das observáveis a serem inferidas modifica a interdependência entre as partes e o modo como o emaranhamento é afetado por medições locais, resultando em estados relativos mais separáveis num caso do que no outro.

### 5.5.3.0 $F_C$ aplicada ao estado $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$

Para calcular  $F_C$  para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  precisamos calcular  $C$  para seus estados relativos, dado que já sabemos que  $C(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1$ . Os estados relativos para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  são dados pela Eq. (5.33), ou ( $k = 0, 1$ )

$$|\psi_{Bell\otimes Bell}^{[k_1]}\rangle = |k_1k_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_30_4\rangle + |1_31_4\rangle),$$

da onde encontramos  $C(|\psi_{Bell\otimes Bell}^{[k_1]}\rangle) = 1/2$ . Os estados relativos para a parte  $P_2$  são os mesmos, assim  $C(|\psi_{Bell\otimes Bell}^{[k_2]}\rangle) = 1/2$ . Para  $P_3$ , temos

$$|\psi_{Bell\otimes Bell}^{[k_1]}\rangle = |0_30_4\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_10_2\rangle + |1_11_2\rangle),$$

com  $C(|\psi_{Bell\otimes Bell}^{[k_3]}\rangle) = 1/2$ . Para a parte  $P_4$ , os estados relativos coincidem com os de  $P_3$ , logo  $C(|\psi_{Bell\otimes Bell}^{[k_4]}\rangle) = 1/2$ .

Utilizando o valor de emaranhamento de  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ , de seus estados relativos, e como  $p(|k_n\rangle) = 1/2$  para  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $k = 1, 2$ , derivamos que  $F_C(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 1/2$ .

Desta forma,  $F_C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1 > F_C(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 1/2$ , como esperado. É emblemático que  $F_C$  para GHZ é o dobro do valor de  $F_C$  para o produto direto de dois Bells. Em ambos temos 4 partes, no primeiro caso todas correlacionam-se com todas, no segundo temos dois pares de dois subsistemas correlacionados.

### 5.5.3.0 Condições de maximização de $F_C$

Iremos aqui nos ater ao caso em que todos os  $P_n$  têm a mesma dimensão. Se isto não for o caso, a análise abaixo continua sendo válida, mas então certo cuidado tem que ser tomado para separar os estados  $|\psi\rangle$  em classes, dependendo de quais elementos de base (funções dos distintos índices  $k_n$  para os  $P_n$ 's) estão sendo concretamente utilizados em suas composições. Também vamos supor  $N \geq 3$ . O caso de duas partes,  $P_1$  e  $P_2$ , leva

naturalmente a  $F_C(\cdot) = C(\cdot)$  (ver última seção do presente capítulo).

Suponha um estado  $|\psi\rangle$  que tenha a seguinte propriedade (obviamente em uma certa base específica de interesse): qualquer um de seus estados relativos é separável. Tal  $|\psi\rangle$  será chamado de ERS, acrônimo para Estados Relativos Separáveis. Então, lembrando a fórmula geral de  $F_C$ , Eq. (5.36), temos que

$$F_C(|\psi_{\text{ERS}}\rangle) = C(|\psi_{\text{ERS}}\rangle). \quad (5.48)$$

Considere agora distintos estados  $|\psi_{\text{max}}\rangle$  que apresentem máximo valor de  $C$ . Uma vez que  $C$  é normalizado, temos que  $C(|\psi_{\text{max}}\rangle) = 1$ . Destas considerações, concluímos que um estado que maximize  $F_C$  é justamente um estado que é simultaneamente ERS e  $|\psi_{\text{max}}\rangle$ .

Para estados GHZ generalizados, tais como apresentados na seção 3.5 (ver Eq. (3.25)), temos que

$$|\psi_{\text{GHZ}_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle^{\otimes N}. \quad (5.49)$$

Deveríamos observar (tomando como ilustração o caso  $N = 3$ ) que escrever  $|\psi_{\text{GHZ}_3}\rangle = (|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)/\sqrt{3}$  é apenas uma convenção apropriada. Obviamente que índices  $k_n$  permutados (mas não repetidos para cada parte  $P_n$ ), tais como  $(|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle)/\sqrt{3}$  formam perfeitos estados GHZ. Por construção, estados GHZ são ERS. Além disso, mostramos na seção 3.5 que estados GHZ maximizam  $C$ . Portanto, estados GHZ resultam num valor máximo para  $F_C$ .

Por último, é relevante notar que apenas estados GHZ maximizam  $F_C$ . Entendemos isto do seguinte. Um estado qualquer  $|\psi_{\text{max}}\rangle$ , diferente de  $|\psi_{\text{GHZ}}\rangle$ , necessariamente possuirá estados relativos que não sejam autoestados. De fato, se  $|\psi_{\text{max}}\rangle$  não é GHZ, ao menos um autoestado individual de  $P_n$ ,  $|k_n\rangle$ , estará repetido em  $|\psi_{\text{max}}\rangle$  e portanto o estado relativo  $|\psi^{|k_n}\rangle$  é não-separável.

## 5.6 $\mathbb{F}$ cuja função $f$ é dada pela entropia de Shannon

Construímos  $F_C$  como uma diferença entre o grau de emaranhamento de um estado e de seus estados relativos. Iremos desenvolver agora outra proposta, com enfoque na previsibilidade do resultado de uma medição. Para tal, utilizaremos as probabilidades associadas a cada medição possível, calculada através da entropia de Shannon. Dessa maneira, começamos introduzindo a entropia de Shannon.

### 5.6.1 Entropia de Shannon

No que se segue, representaremos uma variável aleatória  $X$  como o par  $\{x, p(x)\}$ , onde  $x$  designa os eventos possíveis e  $p(x)$  a distribuição de probabilidade com que ocorrem.

Em teoria da informação clássica, Shannon modela informação como eventos que ocorrem com certas probabilidades [35, 45, 124]. Se  $X$  é uma variável aleatória sobre uma

série de eventos  $x$ , distribuídos de acordo com  $p(x)$ , então a entropia de Shannon de  $X$  é

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log_2[p(x)]. \quad (5.50)$$

Quanto maior  $H$ , maior a incerteza sobre a variável aleatória  $X$ .

Além da entropia de Shannon, existem diferentes gradezas derivadas, igualmente relevantes para descrever informação de um ponto de vista estatístico. Sendo então  $X = \{x, p(x)\}$  e  $Y = \{y, p(y)\}$ , definimos

- *Entropia conjunta*: mede a incerteza associada a duas variáveis aleatórias. A entropia conjunta de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é dada pela entropia da distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$ , ou

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2[p(x, y)]. \quad (5.51)$$

- *Entropia condicional*: mede a informação contida em uma variável aleatória, dado que o resultado de outra variável aleatória seja conhecido. Desta forma a informação ganha em saber o resultado de  $X$ , uma vez ocorrido  $Y$ , resulta na entropia condicional

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2[p(x|y)], \quad (5.52)$$

sendo  $p(x|y)$  a probabilidade de o evento  $x$  ocorrer caso o evento  $y$  já tenha ocorrido.  $p(x|y)$  pode ser determinada pela regra de Bayes, tal que

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}. \quad (5.53)$$

Destacamos também três relações importantes, que devem ser verificadas pela função entropia de Shannon [45]:

- A ordem das variáveis aleatórias não altera a entropia conjunta:

$$H(X, Y) = H(Y, X). \quad (5.54)$$

- Condição de subaditividade da entropia:

$$H(X) + H(Y) \geq H(X, Y). \quad (5.55)$$

- A entropia de um par de variáveis,  $H(X, Y)$ , se reduz a  $H(X|Y)$  quando a informação  $H(Y)$  sobre o evento  $y$  é conhecida:

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y). \quad (5.56)$$

### 5.6.2 Definição de $F_H$

A entropia de Shannon mede a incerteza *a priori* do resultado de um evento, sendo que os resultados possíveis devem ocorrer segundo uma distribuição de probabilidades. De certa forma, tal situação corresponde às nossas indagações sobre que tipo de informação iríamos obter (digamos, através de colapsos parciais do estado do sistema) ao fazermos medições sobre um certo estado puro  $|\psi\rangle$ .

Para nos auxiliar nas discussões, vamos voltar aos estados  $|\psi_{GHZ_4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle + |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle)$ , Eq. (5.5), e  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2\rangle + |1_1 1_2\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3 0_4\rangle + |1_3 1_4\rangle)$ , destacando o seguinte. As nossas incertezas sobre possíveis medições se alteram nestes dois estados apenas a partir do momento em que se conhece o autoestado de uma parte do sistema. Por exemplo, inicialmente a probabilidade de medirmos  $|0_n\rangle$  ou  $|1_n\rangle$  é  $1/2$  para qualquer parte  $P_n$ , tanto para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  quanto para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ . Poderíamos então concluir que nossa incerteza sobre os resultados de uma medição seja a mesma para os dois estados. Contudo, se soubéssemos que uma parte  $P_n$  está em um autoestado  $|0_n\rangle$  ou  $|1_n\rangle$ , os estados  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  e  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  se modificariam de maneira diferente, assumindo a forma de um de seus estados relativos.

Os estados relativos para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  e  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  são dados pelas Eqs. (5.32) e (5.33). Para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , são todos autoestados na forma  $|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle$  ou  $|1_1 1_2 1_3 1_4\rangle$ , e portanto, a incerteza sobre uma medição posterior a ser feita (mantendo-se a mesma base) em qualquer subsistema  $P_n$  é nula. Para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ , no entanto, temos estados relativos dados como superposições  $|0_1 0_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3 0_4\rangle + |1_3 1_4\rangle)$  e  $|1_1 1_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_3 0_4\rangle + |1_3 1_4\rangle)$  para as partes  $P_1$  e  $P_2$ . Como podemos ver, nesse caso ainda há incerteza a respeito de resultados de medições posteriores que poderiam ser feitas no estado inicial já colapsado.

A entropia de Shannon, aplicada às probabilidades de se medir um ou outro autovetor (probabilidades essas codificadas nos módulos ao quadrado dos coeficientes de expansão, que multiplicam os autovetores), é capaz de mensurar tal incerteza sobre resultados. Iremos, portanto, utilizá-la na construção de uma expressão — seguindo a forma funcional de  $\mathbb{F}$  na Eq. (5.35) — para o grau de interdependência entre partes de um sistema baseada em presunção de informação, a qual denotaremos  $F_H$ .

Seja um estado  $|\psi\rangle$   $N$ -partido puro, cada parte  $P_n$  com espaço de Hilbert  $H_n$  de dimensão  $d_n$  e descrita em uma base com autovetores  $\{|k_n\rangle\}$  ( $k_n = 0, 1, \dots, d_n - 1$ ). Temos  $|\psi\rangle = \sum_{k_1, \dots, k_N} c_{k_1 \dots k_N} |k_1 \dots k_N\rangle$  onde segue a condição de normalização  $\sum_{k_1, \dots, k_N} |c_{k_1 \dots k_N}|^2 = 1$  e a cada autovetor  $|k_1 \dots k_N\rangle$  associamos uma probabilidade de medição, dada por  $p(k_1, \dots, k_N) = |c_{k_1 \dots k_N}|^2$ . Prosseguindo, podemos construir, vinculada ao estado  $|\psi\rangle$  e à base específica em que está escrito, uma variável aleatória definida pela distribuição de probabilidades (ver seção 5.6.1)

$$I(|\psi\rangle) = \{(k_1, \dots, k_N), p(k_1, \dots, k_N) = |c_{k_1 \dots k_N}|^2\}, \quad (5.57)$$

em que “eventos”  $(k_1, \dots, k_N)$  ocorrem com probabilidade  $p(k_1, \dots, k_N)$ . Note que  $I(|\psi\rangle)$

pode ser encarada como formada por  $N$  variáveis aleatórias  $I_n$ , onde

$$I_n(|\psi\rangle) = \{k_n, p(k_n) = \sum_{k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N} p(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N)\}, \quad (5.58)$$

onde  $\hat{k}_n$  representa a ausência de  $k_n$  (ou seja, a soma é feita sobre todos os índices de  $k_1$  a  $k_N$ , com exceção de  $k_n$ ).

Podemos calcular a entropia de Shannon para  $I(|\psi\rangle)$  (definido acima pela Eq. (5.57)), obtendo

$$\begin{aligned} H(I(|\psi\rangle)) &= - \sum_{k_1, \dots, k_N} p(k_1, \dots, k_N) \log_2[p(k_1, \dots, k_N)] \\ &= - \sum_{k_1, \dots, k_N} |c_{k_1 \dots k_N}|^2 \log_2[|c_{k_1 \dots k_N}|^2]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Assumimos então  $H(|\psi\rangle) \equiv H(I(|\psi\rangle))$ , de modo que quando utilizarmos a expressão  $H(|\psi\rangle)$  não estaremos considerando a entropia de Shannon para o estado  $|\psi\rangle$  em si (o que não faz sentido), mas sim para a multivariável aleatória  $I$ , criada a partir de  $|\psi\rangle$  utilizando a Eq. (5.57).

Finalmente, da função  $H(|\psi\rangle)$  considerada acima, construímos  $F_H(|\psi\rangle)$  como

$$F_H(|\psi\rangle) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) H(|\psi\rangle) - \frac{1}{N} \sum_{n, k_n} p(|k_n\rangle) H(|\psi^{|k_n}\rangle), \quad (5.60)$$

onde  $|\psi^{|k_n}\rangle$  representa um estado relativo a  $|\psi\rangle$ , tal como definido na Eq. (5.31) e  $p(|k_n\rangle)$  é a probabilidade da parte  $P_n$  de  $|\psi\rangle$  colapsar no autoestado  $|k_n\rangle$  após uma medição feita em  $P_n$ . As constantes  $A = (1 - 1/N)$  e  $B = 1/N$  fornecem as normalizações apropriadas para a presente medida.

Dado que  $H(|\psi\rangle)$  quantifica a incerteza quanto ao resultado de medições feitas em  $|\psi\rangle$ ,  $F_H(|\psi\rangle)$  deve nos fornecer uma média de como essa incerteza diminuiria se possuíssemos informação parcial sobre uma parte do sistema. Uma medição feita em um subsistema emaranhado ao restante do sistema causa a redução de outras partes do estado, alterando-o e diminuindo a incerteza associada a medições subsequentes que sejam feitas no estado resultante. Quanto maior a diminuição dessa incerteza, esperamos que maior seja  $F_H(|\psi\rangle)$ .

### 5.6.3 Verificação das condições matemáticas básicas de $F_H$

Demonstraremos nesta seção que  $F_H$  satisfaz as condições que de forma geral uma medida  $\mathbb{F}$  deve satisfazer, isto é,  $F_H$  é não negativa e quando calculada para estados separáveis deve ser nula.

- $F_H \geq 0$

Começamos calculando o ensemble de probabilidades  $I(|\psi^{|k_n}\rangle)$  associado ao estado

relativo  $|\psi^{k_n}\rangle$ . O estado  $|\psi^{k_n}\rangle$  pode ser escrito como

$$|\psi^{k_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(|k_n\rangle)}} \sum_{k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N} c_{k_1 \dots k_n \dots k_N} |k_1 \dots k_n \dots k_N\rangle. \quad (5.61)$$

Associamos a  $|\psi^{k_n}\rangle$  a seguinte variável aleatória

$$I(|\psi^{k_n}\rangle) = \left\{ (k_1, \dots, k_n, \dots, k_N), p'(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N) = \frac{|c_{k_1 \dots k_n \dots k_N}|^2}{p(|k_n\rangle)} \right\}, \quad (5.62)$$

com  $k_n$  fixo. Notar que  $p'(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N)$  já identifica as probabilidades associadas ao estado relativo, após a determinação de que  $P_n$  tem o valor particular de autoestado  $k_n$ .

Também observamos que  $p(|k_n\rangle) = \sum_{k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N} |c_{k_1, \dots, k_N}|^2$ , a mesma expressão que aquela para  $p(k_n)$  (utilizada na definição da variável aleatória  $I_n(|\psi\rangle)$ ), de maneira que temos  $p(|k_n\rangle) = p(k_n)$ . Utilizando esse resultado junto ao fato de que  $|c_{k_1, \dots, k_n, \dots, k_N}|^2 = p(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N)$ , encontramos

$$p'(k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N) = \frac{p(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N)}{p(k_n)}. \quad (5.63)$$

Dessa forma, podemos escrever os  $p$ 's que entram na expressão para a distribuição de probabilidades da variável aleatória  $I(|\psi^{k_n}\rangle)$  em função das probabilidades da variável  $I(|\psi\rangle)$ . Utilizando a regra de Bayes (Eq. (5.53)), podemos escrever

$$\frac{p(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N)}{p(k_n)} = p(k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N | k_n), \quad (5.64)$$

sendo que aqui  $p(k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N | k_n)$  representa a probabilidade dos “eventos”  $(k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N)$  ocorrerem dado que  $k_n$  tenha ocorrido. Utilizando a Eq. (5.64) e o fato de que  $p(|k_n\rangle) = p(k_n)$ , podemos calcular

$$\begin{aligned} \sum_{k_n} p(|k_n\rangle) H(|\psi^{k_n}\rangle) &= - \sum_{k_1, \dots, k_N} p(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N) \log_2 [p(k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N | k_n)], \\ &= H(I_{\hat{n}}(|\psi\rangle) | I_n(|\psi\rangle)), \end{aligned} \quad (5.65)$$

sendo que  $I_{\hat{n}}(|\psi\rangle)$  indica a variável aleatória formada pelas variáveis

$$I_1(|\psi\rangle), \dots, I_{n-1}(|\psi\rangle), I_{n+1}(|\psi\rangle), \dots, I_N(|\psi\rangle).$$

Prosseguindo, podemos utilizar a relação na Eq. (5.56) para obtermos

$$\begin{aligned} H(I_{\hat{n}} | I_n) &= H(I_{\hat{n}}, I_n) - H(I_n), \\ &= H(I) - H(I_n). \end{aligned} \quad (5.66)$$

Por fim, utilizando o resultado (5.66) na equação (5.65), e substituindo na definição de

$F_H$  (eq. 5.60), chegamos a

$$F_H(|\psi\rangle) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) H(|\psi\rangle) - \frac{1}{N} \sum_n \left[ H(I(|\psi\rangle)) - H(I_n(|\psi\rangle)) \right], \quad (5.67)$$

e portanto, podemos escrever  $F_H(|\psi\rangle)$  como

$$F_H(|\psi\rangle) = \frac{1}{N} \sum_n H(I_n(|\psi\rangle)) - \frac{H(I(|\psi\rangle))}{N}. \quad (5.68)$$

Segundo a subaditividade da entropia de Shannon (eq. 5.55), temos

$$\sum_n H(I_n(|\psi\rangle)) - H(I(|\psi\rangle)) \geq 0. \quad (5.69)$$

Assim, concluímos que  $F_H(|\psi\rangle) \geq 0$ .

- $F_H(|\phi_{sep}\rangle) = 0$  para  $|\phi_{sep}\rangle$  separável.

Para esta análise, utilizaremos a forma de  $F_H$  que deduzimos acima, Eq. (5.68). Então, para um estado  $|\phi_{sep}\rangle$ , precisamos calcular  $H(I(|\phi_{sep}\rangle))$  e  $H(I_n(|\phi_{sep}\rangle))$ . Definimos  $|\phi_{sep}\rangle$  como um estado  $N$ -partido puro, tal que  $|\phi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle$ , onde  $|\phi_n\rangle$  representa o estado individual da parte  $P_n$  de  $|\phi\rangle$ . Também temos que  $|\phi_n\rangle = \sum_{k_n=0}^{d_n-1} c_{k_n} |k_n\rangle$ , com  $\sum_{k_n=0}^{d_n-1} |c_{k_n}|^2 = 1$ . Logo, temos  $|\phi_{sep}\rangle$  dado por

$$|\phi_{sep}\rangle = \sum_{k_1, \dots, k_N} c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_N} |k_1 k_2 \dots k_N\rangle. \quad (5.70)$$

O cálculo de  $H(I(|\phi_{sep}\rangle))$  segue de

$$\begin{aligned} H(I(|\phi_{sep}\rangle)) &= - \sum_{k_1 \dots k_N} |c_{k_1}|^2 \dots |c_{k_N}|^2 \log_2 [|c_{k_1}|^2 \dots |c_{k_N}|^2], \\ &= - \sum_{k_1 \dots k_N} |c_{k_1}|^2 \dots |c_{k_N}|^2 \left( \log_2 [|c_{k_1}|^2] + \dots + \log_2 [|c_{k_N}|^2] \right), \\ &= - \sum_{k_1 \dots k_N} |c_{k_1}|^2 \dots |c_{k_N}|^2 \log_2 [|c_{k_1}|^2] - \dots \\ &\quad \dots - \sum_{k_1 \dots k_N} |c_{k_1}|^2 \dots |c_{k_N}|^2 \log_2 [|c_{k_N}|^2], \\ &= - \left( \sum_{k_1} |c_{k_1}|^2 \log_2 [|c_{k_1}|^2] \right) \left( \sum_{k_2} |c_{k_2}|^2 \right) \dots \left( \sum_N |c_{i_N}|^2 \right) - \dots \\ &\quad \dots - \left( \sum_{k_N} |c_{k_N}|^2 \log_2 [|c_{k_N}|^2] \right) \left( \sum_{k_2} |c_{k_2}|^2 \right) \dots \left( \sum_N |c_{i_N}|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Mas sendo  $\sum_{k_n} |c_{k_n}|^2 = 1$  para qualquer  $n$ , concluímos que

$$H(I(|\phi_{sep}\rangle)) = - \sum_{n, k_n} |c_{k_n}|^2 \log_2 [|c_{k_n}|^2]. \quad (5.72)$$



Agora, precisamos determinar os termos de probabilidades que aparecem em  $I_n(|\phi_{sep}\rangle)$ , Eq. (5.58), assim

$$\begin{aligned} p(k_n) &= \sum_{k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N} p(k_1, \dots, k_n, \dots, k_N), \\ &= \sum_{k_1, \dots, \hat{k}_n, \dots, k_N} |c_{k_1}|^2 \dots |c_{k_n}|^2 \dots |c_{k_N}|^2, \\ &= |c_{k_n}|^2. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Portanto, como  $H(I_n(|\phi_{sep}\rangle)) = -\sum_{k_n} |c_n|^2 \log_2[|c_n|^2]$ , do resultado acima

$$\sum_n H(I_n(|\phi_{sep}\rangle)) = -\sum_{n, k_n} |c_{k_n}|^2 \log_2[|c_{k_n}|^2]. \quad (5.74)$$

Da igualdade entre as Eqs (5.72) e (5.74), deduzimos que  $F_H(|\phi_{sep}\rangle) = 0$ .

#### 5.6.4 Aplicação de $F_H$ a casos de interesse

##### 5.6.4.0 Mudanças de bases locais

Para analisar o comportamento de  $F_H$  sob mudanças de base locais, iremos aplicá-la aos mesmos estados  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , Eq. (5.5), e  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$ , Eq. (5.41), estudados anteriormente. Por comodidade do leitor, relembramos que

$$\begin{aligned} |\psi_{GHZ_4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle + |1_1 1_2 1_3 1_4\rangle), \\ |\psi'_{GHZ_4}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle + |-1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|0_2 0_3 0_4\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle - |-1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|1_2 1_3 1_4\rangle. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Além disso, os estados relativos para esses estados são dados pelas Eqs. (5.32) e (5.42)-(5.45). Dois desses estados sendo

$$\begin{aligned} |\psi_{GHZ_4}^{[0_1]}\rangle &= |0_1 0_2 0_3 0_4\rangle, \\ |\psi'_{GHZ_4}^{[+1]}\rangle &= |+1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_2 0_3 0_4\rangle + |1_2 1_3 1_4\rangle), \end{aligned}$$

com os outros estados relativos, em cada caso, apresentando formas semelhantes. Também, o grau de emaranhamento dos dois estados, segundo  $C$ , é o mesmo,  $C(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = C(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) = 1$ .

Calculando  $H(|\psi_{GHZ_4}\rangle)$ , obtemos (os cálculos são diretos e não serão explicitados)

$$H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = -\frac{1}{2} \log_2 \left[ \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \log_2 \left[ \frac{1}{2} \right] = 1.$$

Para seus estados relativos, obtemos

$$H(|0_1 0_2 0_3 0_4\rangle) = H(|1_1 1_2 1_3 1_4\rangle) = -1 \times \log_2[1] = 0. \quad (5.76)$$

Cada parte  $P_n$  do sistema possui 2 estados relativos  $|\psi^{k_n}\rangle$ , com  $p(|k_n\rangle) = 1/2$  para  $n = 1, 2, 3, 4$ . Assim, chegamos que  $F_H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = \frac{3}{4}$ .

Para  $H(|\psi'_{GHZ_4}\rangle)$ , temos

$$H(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \log_2\left[\frac{1}{4}\right] = 2. \quad (5.77)$$

Observarmos que  $H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) < H(|\psi'_{GHZ_4}\rangle)$ , resultado que deveria ser esperado de nossas prévias discussões. De fato, pelo modo como montamos  $H(|\psi\rangle)$ , para  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , temos dois eventos possíveis, cada um com probabilidade  $1/2$ , enquanto para  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$  temos quatro eventos, cada um com probabilidade associada de  $1/4$ . Portanto, temos uma maior incerteza associada à distribuição de probabilidades provenientes de  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$  do que de  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ .

Prosseguimos calculando  $H$  para os estados relativos de  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$ . Para  $|\psi'^{|\pm 1\rangle}_{GHZ_4}\rangle$ , obtemos

$$H(|\psi'^{|\pm 1\rangle}_{GHZ_4}\rangle) = -\frac{1}{2} \log_2\left[\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} \log_2\left[\frac{1}{2}\right] = 1. \quad (5.78)$$

Vamos agora calcular  $H$  para  $|\psi'^{k_n}_{GHZ_4}\rangle$  com  $n = 2, 3, 4$  e  $k_n = 0, 1$ , Eqs. (5.42)-(5.45)), temos

$$H(|\psi'^{k_n}_{GHZ_4}\rangle) = -\frac{1}{2} \log_2\left[\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} \log_2\left[\frac{1}{2}\right] = 1. \quad (5.79)$$

É interessante notar que embora  $|\psi'^{0_n}_{GHZ_4}\rangle$  e  $|\psi'^{1_n}_{GHZ_4}\rangle$  sejam estados separáveis, ao passo que  $|\psi'^{+1}_{GHZ_4}\rangle$  e  $|\psi'^{-1}_{GHZ_4}\rangle$  sejam estados emaranhados, todos possuem o mesmo valor de  $H$ . Isso se deve ao fato de que os estados dão origem a variáveis aleatórias com distribuição de probabilidades, Eq. (5.57), semelhantes, com dois eventos possíveis, cada um com probabilidade associada de  $1/2$ . Dessa maneira, independente do valor de emaranhamento que possuam,  $H$  será o mesmo para todos eles.

Utilizando os valores de  $H$  obtidos para  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$  e para seus estados relativos, e sabendo que cada parte  $P_n$  de  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$  possui dois estados relativos, com  $p(|k_n\rangle) = 1/2$  para  $n = 1, 2, 3, 4$ , encontramos  $F_H(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) = 1/2$ .

Em suma,  $F_H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 3/4 > F_H(|\psi'_{GHZ_4}\rangle) = 1/2$ , em conformidade com o esperado de nossa medida  $F_H$ . A interdependência entre as partes é maior em  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  do que em  $|\psi'_{GHZ_4}\rangle$ , segundo  $F_H$ , devido ao fato de que medições locais em  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  diminuem em maior grau, na média, a incerteza quanto a medições locais posteriores.

#### 5.6.4.0 $F_H$ aplicada ao estado $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$

Primeiramente podemos intuir que  $H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) < H(|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle)$ . Uma medição feita em todo o estado  $|\psi_{Bell \otimes Bell}\rangle$  tem quatro resultados possíveis, todos com igual probabilidade, enquanto no estado  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$  temos dois resultados possíveis apenas. De fato, de

cálculos diretos  $H(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 2$ , que é maior do que  $H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 1$ .

Os estados relativos a todas as partes de  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ , em sua estrutura, basicamente são também estados de Bell, sendo dois resultados possíveis com igual probabilidade para cada um. Calculando  $H$ , obtemos  $H(|\psi_{Bell\otimes Bell}^{k_n}\rangle) = 1$  para  $k_n = 0, 1$  e  $n = 1, 2, 3, 4$ . Com todos os dados necessários para se calcular  $F_H$ , obtemos  $F_H(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = 1/2$ . O resultado é menor do que  $F_H(|\psi_{GHZ_4}\rangle) = 3/4$ , concordando com nossa argumentação. Destacamos que embora inicialmente haja incertezas sobre o resultado de uma medição tanto em  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  quanto em  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , o conhecimento parcial do autoestado de um dos subsistemas elimina toda essa incerteza no caso de  $|\psi_{GHZ_4}\rangle$ , com o mesmo não ocorrendo para  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ .

É igualmente interessante destacar que  $F_H(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = F_H(|\psi'_{GHZ_4}\rangle)$ , o que demonstra a similaridade entre estes dois estados no tocante à expectativa de informação obtida a partir de medições locais em distintas partes  $P_n$  de seus estados.

## 5.7 Interpretação e comparação entre $F_C$ e $F_H$

$F_C$  e  $F_H$  medem, ambas, a interdependência entre as partes de um sistema, quantificando o quanto uma medição local em uma dessas partes pode alterar o resto do estado, e o quanto de informação a respeito das outras partes desse sistema pode ser obtida a partir dessa interferência. Entretanto, o grau de interdependência entre partes de um  $|\psi\rangle$  será aferido de formas distintas (por nossa função geral  $\mathbb{F}$ ) dependendo da escolha de  $f$ .

$F_C$  avalia o grau de destruição do emaranhamento em um estado devido medições locais. Assim,  $F_C$  é baseado na noção de separabilidade (uma vez que  $f$  é tomado como uma medida de emaranhamento,  $C$ ): em um estado separável, o conhecimento sobre os estados individuais (que representam cada subsistema) é completo. Assim, quanto mais separáveis os *estados relativos* em relação ao estado original, maior será  $F_C$  (também  $F_C$  tendo a tendência de crescer quando o emaranhamento do estado original é alto, ver seção (5.5.2)).

A maneira como  $F_H$  avalia as consequências de medições locais sobre um estado  $|\psi\rangle$  difere de  $F_C$ .  $F_H$  quantifica como a incerteza sobre medições posteriores decresce em um estado devido a medições locais em suas partes.

Embora estas duas interpretações em alguns casos sejam bastante próximas, podem apresentar resultados distintos em certas situações específicas. Como exemplo, vamos analisar o estado não separável de dois qubits, definido por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} |0_1 0_2\rangle - \frac{1}{2} |1_1 0_2\rangle + \frac{1}{2} |0_1 1_2\rangle + \frac{1}{2} |1_1 1_2\rangle, \quad (5.80)$$

onde  $|0_n\rangle$  e  $|1_n\rangle$  formam uma base para o  $n$ -ésimo “qubit” ( $n = 1, 2$ ). Os estados relativos

são

$$\begin{aligned}
|\psi^{01}\rangle &= +\frac{|0_1\rangle}{\sqrt{2}}(|0_2\rangle + |1_2\rangle), \\
|\psi^{11}\rangle &= -\frac{|1_1\rangle}{\sqrt{2}}(|0_2\rangle - |1_2\rangle), \\
|\psi^{02}\rangle &= +\frac{|0_2\rangle}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle - |1_1\rangle), \\
|\psi^{12}\rangle &= +\frac{|1_2\rangle}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle + |1_1\rangle).
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Analisando primeiro  $F_C$  para  $|\psi\rangle$  acima, notamos que todos os seus estados relativos são separáveis. Esse é um resultado geral para sistemas puros bipartidos: seus estados relativos são sempre separáveis, dado que descrevem apenas uma parte de um estado puro de duas partes. Em outras palavras, se obtivermos a informação parcial de qual autoestado está uma das partes do nosso  $|\psi\rangle$ , podemos com certeza associar um estado individual à outra parte (embora não necessariamente um autoestado). Com isso, podemos com facilidade calcular  $F_C(|\psi\rangle) = C(|\psi\rangle)$ . Para nosso estado, que tem emaranhamento máximo, encontramos então que  $C(|\psi\rangle) = F_C(|\psi\rangle) = 1$ .

Analisemos agora  $F_H$ . Temos que calcular  $H$  para nossos estados. Encontramos para  $|\psi\rangle$  que  $H(|\psi\rangle) = 2$ . Para os estados relativos,  $H(|\psi^{k_n}\rangle) = 1$  para  $k_n = 0, 1$  e  $n = 1, 2$ . Temos também que  $p(|k_n\rangle) = 1/2$  para todos  $|k_n\rangle$ . Assim, utilizando esses valores, encontramos  $F_H(|\psi\rangle) = 0$ . Apesar de à primeira vista parecer um resultado inconsistente, tal valor faz sentido quando consideramos o significado de  $F_H$ . Antes de obtermos qualquer informação a respeito do primeiro subsistema, poderíamos associar uma probabilidade de  $1/2$  de obtermos  $|0_2\rangle$  e uma probabilidade de  $1/2$  de obtermos  $|1_2\rangle$  para o segundo. Mas caso soubéssemos que  $P_1$  encontra-se, por exemplo, no autoestado  $|k_1\rangle$  ( $k_1$  sendo 0 ou 1), as probabilidades associadas a  $P_2$  continuariam sendo as mesmas (ou seja, 50%–50% de estar em  $k_2 = 0$  e  $k_2 = 1$ ). Como não há mudança na expectativa de ganho de informação com uma media, é coerente portanto obtermos  $F_H(|\psi\rangle) = 0$ . Esse resultado não viola de maneira alguma nossa exigência de  $F_H(|\phi_{sep}\rangle) = 0$  para  $|\phi_{sep}\rangle$  separável, pois não exigimos que *apenas* estados separáveis resultem em  $F_H = 0$ .

## Correlações em observáveis de estados EPR e a consistência lógica da argumentação EPR

Ao longo dessa tese viemos trabalhando com o conceito de correlações quânticas, inclusive emaranhamento, e formas de caracterizá-las através de diferentes propostas de medidas. Portanto, o enfoque até aqui foi mais técnico e operacional. Em particular, propusemos uma função  $F$  (na verdade, uma classe de funções) que visa medir o grau de interdependência entre partes de um sistema.

Tal tipo de análise encontra eco nos questionamentos levantados no artigo EPR [10], publicado por Einstein, Podolsky e Rosen em 1935. Como já mencionado, este foi o primeiro trabalho a perceber que as leis da mecânica quântica — e a forma como esta descreve a natureza — implica em correlações não-locais. Discordando disso ser algo possível no mundo físico concreto, EPR segue um raciocínio lógico bastante interessante. Os autores não afirmam explicitamente que a mecânica quântica seja incorreta. Ao invés, utilizam as próprias regras da mecânica quântica, e um conceito (hoje em dia bastante questionável) de “sistemas não interagentes”, de forma a mostrar que um estado quântico não consegue descrever a totalidade dos “elementos de realidade” de um sistema emaranhado. O estado utilizado por eles é designado como estado EPR, ao qual chamaremos  $|\Psi\rangle$ . Ao final de seu raciocínio, EPR conclui que a mecânica quântica é uma teoria incompleta.

Iremos demonstrar neste apêndice um fato matemático importante para estados EPR. Apesar de ser relativamente óbvio quando se considera uma construção para  $|\Psi\rangle$  baseada em estados de posição e momento ou de componentes de spin  $1/2$  (as duas formulações clássicas para estados emaranhados), este fato vale de forma geral. Estados EPR (constituídos por dois subsistemas, geralmente duas partículas) apresentam uma relevante correlação para as observáveis associadas aos autoestados usados na expansão de  $|\Psi\rangle$ : todas estas observáveis advêm de operadores que não comutam entre si (não só para o subsistema a ser inferido indiretamente, mas também para o subsistema a ser medido diretamente).

Este tipo de correlação quântica para estados  $|\Psi\rangle$  — exigida pelo formalismo matemático da teoria e ignorada tanto por EPR como pelos trabalhos subsequentes criticando

suas conclusões— introduz um novo ingrediente na estrutura do raciocínio usado pelo artigo para mostrar que a mecânica quântica é incompleta. Iremos argumentar aqui que tal correlação invalida algumas das suposições feitas em [10]. Assim, a mecânica quântica não poderia ser considerada incompleta pelo argumentos apresentados por EPR.

## 6.1 Alguns aspectos gerais a respeito de estados EPR e medidas feitas sobre eles

Um ponto importante na argumentação EPR - que objetiva demonstrar que a mecânica quântica é uma teoria incompleta - é a possibilidade de descrever um dado sistema por um  $|\Psi\rangle$  específico, o estado EPR. Então, um eventual exame desse sistema (através de medidas) necessariamente resultaria na conclusão de [10]: “the description of reality as given by a wave function is not complete” (a descrição da realidade [de tal sistema] tal como dada pela função de onda [do estado EPR  $|\Psi\rangle$ ] não é completa). A discussão EPR completa será resumida na seção 6.3. Na presente seção, nós nos concentramos apenas nas características apresentadas pelos estados EPR, assim como nos tipos de experimentos que devem ser feitos tal que se possa prever os valores que podem ser inferidos para as observáveis deste  $|\Psi\rangle$  específico.

Por conveniência, nós adotamos uma notação ligeiramente diferente daquela adotada em [10], mas que não leva a nenhuma forma de distanciamento das construções originais. Além disso, embora em [10] sejam apresentados um formalismo matemático adequado e considerações a respeito de  $|\Psi\rangle$  (incluindo exemplos utilizando autoestados de posição e momento), não são estabelecidos pressupostos claros ou propriedades para  $|\Psi\rangle$ . A esse respeito, deve-se levar em conta que [10] foi publicado em 1935, e trabalhos fundamentais - e.g., os produzidos por John von Neumann [8, 126–128] - desenvolvendo as bases da mecânica quântica e estabelecendo sua estrutura formal (como exigido pelos padrões mais rigorosos de hoje) ainda estavam começando a ser publicados.

Os principais passos na preparação e análise de  $|\Psi\rangle$  estão esquematizados na figura 6.1. Inicialmente ( $t < 0$ ), nós assumimos dois sistemas, I e II, sem que haja interação entre eles. Dessa forma, o estado composto que os descreve  $|\Psi(t < 0)\rangle$  é dado pelo produto dos supostamente conhecidos (para  $t < 0$ ) estados individuais de I e II. Então, durante o intervalo de tempo  $0 \leq t \leq T$ , I e II interagem de alguma maneira particular, tal que correlacionem quanticamente - i.e. emaranhem [11] - certas “grandezas físicas” “pertencentes” a I (digamos, associadas ao operador hermitiano  $\hat{C}$  com autovalores  $\{c_n\}$ ) a algumas “pertencentes” a II (digamos, associadas a  $\hat{A}$  com  $\{a_n\}$ ), resultando no estado emaranhado  $|\Psi(T)\rangle$ . Finalmente, para  $t > T$  “... *there is no longer any interaction between the two parts*” (não há mais interação entre as duas partes [i.e., entre I e II]). Além disso, assume-se para os sistemas I e II, agora afastados (um do outro), que estes mantenham, para  $t > T$ , o emaranhamento obtido em  $t = T$ , até que uma eventual medida futura seja feita. Assim, seja qual for a dinâmica que possuam quando separados, esta não deve alterar os componentes de  $|\Psi(t > T)\rangle$  correspondentes aos autovetores  $\{|c_n\rangle\}$  de

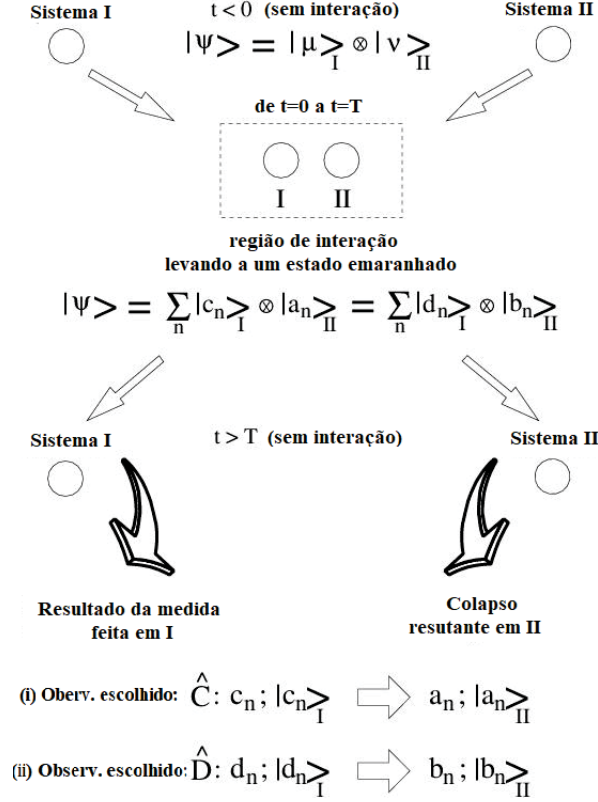


Figura 6.1: Esquematização da preparação de estado e posterior seleção de medidas, com seus possíveis resultados, proposta em EPR

$\hat{C}$  e  $\{|a_n\rangle\}$  de  $\hat{A}$ . Assim,  $|\Psi(t)\rangle$  deve possuir a seguinte forma geral

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n u_n |\tilde{\mu}_n(t), c_n\rangle_I \otimes |\tilde{\nu}_n(t), a_n\rangle_{II}, \quad (6.1)$$

sendo  $u_n$  números complexos tais que  $\sum_n |u_n|^2 = 1$ . Aqui,  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\nu}$  se relacionam, respectivamente, a como as observáveis (que não  $\hat{C}$  e  $\hat{A}$ ) de I e II irão evoluir no tempo uma vez que os sistemas não mais interajam.

Caso haja a intenção de realizar medidas apenas das grandezas correlacionadas, e também não se pretenda realizar experimentos subsequentes no estado colapsado para medir outras observáveis (uma suposição tácita em [10], à qual nos referiremos como condição EPR (a)), a informação dada por  $\tilde{\mu}_n(t)$  e  $\tilde{\nu}_n(t)$  não é, de fato, relevante. Consequentemente, no que concerne à aferição de  $\hat{C}$  e  $\hat{A}$ , pode-se descartar essas referências explícitas na equação (6.1), que pode ser escrita apenas como  $|\Psi\rangle = \sum_n |c_n\rangle_I \otimes |a_n\rangle_{II}$ . Este é o procedimento operacional adotado em [10] (embora não seja mencionado enfaticamente).

Uma segunda suposição fundamental, condição (b), para um estado EPR é que  $|\Psi\rangle$ , antes de qualquer medida, possa ser escrito de duas formas distintas:

$$|\Psi\rangle = \sum_n u_n |c_n\rangle_I \otimes |a_n\rangle_{II} = \sum_n v_n |d_n\rangle_I \otimes |b_n\rangle_{II}, \quad (6.2)$$

com  $\sum_n |u_n|^2 = 1$  e  $\sum_n |v_n|^2 = 1$ , e onde o conjunto  $\{|z_n\rangle\}$  ( $z = a, b, c, d$ ) é composto por



autovetores de  $\hat{Z}$  ( $\hat{Z} = \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ ), ou

$$\hat{Z}|z_n\rangle = z_n|z_n\rangle. \quad (6.3)$$

A referência [10] ilustra a existência de estados tais como expostos na equação (6.2) tomando I e II como duas partículas em um espaço unidimensional, e as observáveis  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  como suas posições e momentos. Uma vez que a viabilidade da equação (6.2) é exemplificada, a análise em [10] procede sem assumir uma situação específica, se baseando totalmente no caso geral representado pela equação (6.2).

Um ponto fundamental na argumentação EPR (ver seção 6.3) é assegurar que a partir de uma medida feita apenas no sistema I em  $t = \tau > T$ , para determinar a observável  $\hat{C}(\hat{D})$ , necessariamente se obtém completo conhecimento a respeito do valor de  $\hat{A}(\hat{B})$  para o sistema II (figura 6.1). Adicionalmente, esse valor seria obtido sempre que esse sistema fosse inspecionado para  $t > T$ . Obviamente, esse cenário deve ser compatível com  $|\Psi\rangle$  e nós chamamos essa condição de condição EPR (c).

Finalmente, a condição EPR (d) consiste em tomar para as observáveis  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , associadas ao sistema II (eq. 6.2), operadores que não comutem, isto é,  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ . Mencionamos aqui que em [10], não são examinadas condições ou imposições a serem feitas sobre as observáveis  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  do sistema I.

A questão que surge naturalmente é quais características  $|\Psi\rangle$  deve apresentar tal que preencha as condições EPR (a)–(d). Este não é apenas um pormenor técnico. É o centro da discussão EPR, uma vez que em [10] argumenta-se que a mecânica quântica não seja completa devido ao fato de que “*predictions concerning a system on the basis of measurements*” (previsões a respeito de um sistema [descrito por um estado EPR]) levam a mais informação do que o permitido por  $|\Psi\rangle$ . Entretanto, EPR assume que a série de experimentos que propõe, e mais importante, seus resultados, são compatíveis com as características de  $|\Psi\rangle$ , dadas as condições (a)–(d).

Na próxima seção, iremos desvelar um pré-requisito fundamental para  $|\Psi\rangle$  poder ser escrito como na equação (6.2). Então, na seção 6.3, iremos abordar as consequências desse resultado para a lógica contida em [10].

## 6.2 Estados EPR e observáveis dadas por operadores incompatíveis

Daqui em diante, os aspectos relevantes de nossos sistemas serão sempre descritos por um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão  $D$  (finita ou infinita), descrito por um número contável de bases. Além disso, só consideramos operadores hermitianos, cujos autovalores são reais e representam observáveis quânticas. Também, para nossos objetivos (em particular na seção 6.2), não é necessário descrever a construção formal das probabilidades de medidas associadas a qualquer aferição de observáveis, e.g., como elegantemente feito em termos rigorosos em [129]. Operacionalmente, nós simplesmente supomos definições bem estabelecidas (como as presentes em [129]), consistentes com procedimentos concretos feitos em medidas físicas [16, 19, 130–133]. De uma maneira concebível, essa é a ‘filosofia’



em [10].

Nós iremos discutir algumas propriedades das matrizes unitárias  $\Gamma$ , i.e., aquelas tais que  $\Gamma \Gamma^\dagger = \Gamma^\dagger \Gamma = \mathbb{1}$ , dando origem a mudanças entre distintas bases ortonormais (BO) de  $\mathcal{H}$ . Em outras palavras, sendo  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  BOs de  $\mathcal{H}$ , a mudança de base  $\{|a_n\rangle\} \leftrightarrow \{|b_n\rangle\}$  é implementada através de

$$|a_n\rangle = \sum_{m=1}^{m=D} \Gamma_{mn} |b_m\rangle, \quad |b_n\rangle = \sum_{m=1}^{m=D} (\Gamma^\dagger)_{mn} |a_m\rangle. \quad (6.4)$$

Para  $D$  finito, as características de  $\Gamma$  são dadas pela álgebra linear tradicional. Entretanto, para  $D = \infty$ , pode-se questionar a legitimidade matemática de tais matrizes, isto é, se operações típicas, como a multiplicação (ao menos para assegurar a unitariedade), são válidas para tais matrizes. Dado que estamos lidando com BOs adequadas para  $\mathcal{H}$  e representando mudanças de base, ou seja, representando essencialmente coeficientes de expansão (i.e.,  $\Gamma_{mn} = \langle b_m | a_n \rangle$ ,  $(\Gamma^\dagger)_{nm} = \langle a_n | b_m \rangle = \langle b_m | a_n \rangle^* = (\Gamma_{mn})^*$ ), o Lema 1.13 em [134] (ver também [135]) garante que  $\Gamma$ ,  $\Gamma \Gamma^\dagger$ , e  $\Gamma^\dagger \Gamma$  são bem definidas. Assim, a equação (6.4) é coerente e  $\Gamma$  é unitária independentemente de  $D$ . Para maiores detalhes, citamos estudos na literatura que tratam do assunto: matrizes unitárias infinito por infinito [136], teoria de representação de matrizes infinitas para operadores em espaços de Hilbert [137, 138], e transformações entre BOs infinitas [135, 139].

### 6.2.1 Transformações entre bases associadas a operadores compatíveis e incompatíveis

No Apêndice 6.6 consideramos quais observáveis discretas poderiam ser usadas como “boas” grandezas físicas, isto é, passíveis de caracterizarem estados EPR gerais. Também discutimos as propriedades gerais dos operadores Hermitianos associados a tais observáveis. Argumentamos que os autovetores de tais operadores formam bases ortonormais para descrever o espaço de Hilbert do problema de que tratamos.

Assim, para  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  como discutidos na seção 6.6 (para  $n = 1, \dots, D$ ),

$$\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle, \quad \hat{B} |b_n\rangle = b_n |b_n\rangle, \quad (6.5)$$

temos que os conjuntos  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  são bases normalizadas do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Essa seção foi colocada ao final desse apêndice por critério de clareza do raciocínio apresentado. Na versão de Bohm dos estados EPR [140, 141], utilizando spin-1/2, ou na definição geral rigorosa para estados EPR [129] (para espaços com dimensão infinita ver [142] e [143]), todas as bases discutidas são ortonormais. Esse é exatamente o caso de  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  se o conjunto de autovalores  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  são não-degenerados. Por outro lado, autovetores pertencentes a um mesmo autovalor  $\lambda$ , em princípio, não precisam ser mutuamente ortogonais. Entretanto, resguardados pelo teorema da decomposição espectral para operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert lineares (ver, e.g., [137]), podemos sempre utilizar a ortogonalização de Gram-Schmidt nesse subconjunto de  $\lambda$ ,

terminando o processo com uma base ortonormal completa para  $\mathcal{H}$ . Assim, sem perda de generalidade, tomamos  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  como BOs.

Iremos considerar agora duas situações possíveis para os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  dados acima, e verificar características da transformação da base de um para a do outro (implementada pela equação (6.4)). Para tal, iremos utilizar resultados já conhecidos a respeito de diagonalização de operadores auto-adjuntos, um assunto tratado em diversos livros-texto de mecânica quântica (o tratamento é especialmente esclarecedor em [144]).

(1)  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  comutam, isto é,  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ : (i) os operadores partilham autovetores; (ii) em uma base em que um deles seja diagonal, digamos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  é diagonal por blocos, com os distintos blocos possuindo dimensões (todas finitas, ver seção 6.2.1) iguais à multiplicidade dos diferentes autovalores de  $\hat{A}$ ; (iii) há ao menos uma base que diagonaliza simultaneamente  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ ; Como consequência de (i)–(iii),  $\Gamma$  na equação (6.4) sempre pode ser reduzida a um formato diagonal por transformações unitárias.

(2)  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  não comutam, isto é,  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ : (i) os operadores não partilham autovetores; (ii) a matriz  $\Gamma$  pode (devido a eventuais simetrias associadas a  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ ) ou não possuir estrutura diagonal por blocos. Entretanto, caso  $\Gamma$  seja diagonal por blocos, devido a (i) nenhum deles pode ser diagonal (dado que isso implicaria a existência de autovetores partilhados). Assim, nenhuma transformação unitária pode tornar  $\Gamma$  diagonal.

### 6.2.2 Correlações entre as observáveis dos estados EPR

Tomemos um sistema composto formado pelos sistemas  $II$  e  $I$ , de espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_{II}$  e  $\mathcal{H}_I$  (ambos de dimensão  $D$ ). O espaço de Hilbert do sistema composto é dado pelo produto tensorial  $\mathcal{H}_{II} \otimes \mathcal{H}_I$ . Nós assumimos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  como operadores hermitianos, possuindo as características discutidas acima, sendo  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  definidos em  $II$  e  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  definidos em  $I$ . Assim, os autovetores de  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , respectivamente  $\{|c_n\rangle\}$  e  $\{|d_n\rangle\}$ , formam uma BO adequada para  $\mathcal{H}_I$ . Equivalentemente, os autovetores de  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , respectivamente  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$ , formam uma BO adequada para  $\mathcal{H}_{II}$ .

Agora, a condição (b) para um estado EPR  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{II} \otimes \mathcal{H}_I$  afirma que este pode ser escrito de duas maneiras diferentes,

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{n=D} u_n |c_n\rangle_I \otimes |a_n\rangle_{II} = \sum_{n=1}^{n=D} v_n |d_n\rangle_I \otimes |b_n\rangle_{II}, \quad (6.6)$$

com  $\sum_n |u_n|^2 = \sum_n |v_n|^2 = 1$ . De fato, para nossos propósitos, e mesmo para os estados EPR descritos em [129], pode-se utilizar a situação mais simples onde  $u_n = v_n = \text{const} \forall n$ . Ainda assim, por questão de completeza, iremos utilizar os coeficientes mais gerais  $u_n$  e  $v_n$ .

Ao inserir a segunda relação da equação (6.4) na segunda igualdade na equação (6.6),

obtemos

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{m=1}^{m=D} v_m |d_m\rangle_I \otimes \sum_{n=1}^{n=D} (\Gamma^\dagger)_{nm} |a_n\rangle_{II} \\ &= \sum_{n=1}^{n=D} \left( \sum_{m=1}^{m=D} (\Gamma^\dagger)_{nm} v_m |d_m\rangle_I \right) \otimes |a_n\rangle_{II}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Comparando a equação (6.7) à equação (6.6), devemos ter (lembrando que  $\{|a_n\rangle\}$  é uma BO)

$$u_n |c_n\rangle_I = \sum_{m=1}^{m=D} \Gamma_{mn}^* (v_m |d_m\rangle_I). \quad (6.8)$$

Dado que a multiplicação por um escalar  $u_n$ 's ( $v_n$ 's) não altera a forma como o conjunto  $\{|c_n\rangle\}$  ( $\{|d_n\rangle\}$ ) gera  $\mathcal{H}_I$ , da equação (6.8), nós temos que, a menos do complexo conjugado dos elementos de  $\Gamma$ , a mudança de base  $\{|c_n\rangle\} \leftrightarrow \{|d_n\rangle\}$  é semelhante à  $\{|a_n\rangle\} \leftrightarrow \{|b_n\rangle\}$ . Assim, o modo como os elementos  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  estão relacionados entre si é o mesmo como o dos elementos  $\{|c_n\rangle\}$  e  $\{|d_n\rangle\}$ .

Mas a estrutura de  $\Gamma$  (e consequentemente, também de  $\Gamma^*$ ) representa uma mudança de base associada a operadores incompatíveis ( $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , condição EPR (d)). Assim, chegamos à principal descoberta desta seção, isto é, se um estado  $|\Psi\rangle$  pode ser expandido como na equação (6.6), para as bases relacionadas aos operadores  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$ , se tomarmos  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ , então, a partir da seção 6.2.1, concluímos necessariamente que  $[\hat{C}, \hat{D}] \neq 0$ . De fato,  $\Gamma$  é essencialmente uma matriz de mudanças de base também para  $C-D$ .  $\Gamma$  não pode ser diagonalizada, uma contradição caso  $C$  e  $D$  comutem.

É um pouco surpreendente que um resultado tão geral (e direto) a respeito dos estados EPR, até onde saibamos, não tenha sido notado na literatura, mesmo sendo óbvio na versão de Bohm da construção do EPR. De fato, na seção 6.5 nós ilustramos essa propriedade geral considerando transformações de estados EPR de spin 1/2 em direções arbitrárias.

## 6.3 Um resumo da lógica EPR

Por conveniência, ao longo de toda essa seção, as suposições relevantes para nossas discussões que sejam feitas em [10] serão citadas explicitamente, algumas delas nomeadas como  $S_1, S_2, \dots$  (embora em [10] este tipo de rotulação não seja utilizado), para que possamos retomá-las sempre que necessário.

### 6.3.1 A visão de EPR a respeito de “realidade física” e de algumas das estruturas formais da mecânica quântica

O artigo EPR inicia-se evitando discussões conceituais mais abstratas, propondo um critério pragmático “necessário” para uma teoria ser completa (S1): “... *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*” (...todo elemento

da realidade física deve possuir uma contraparte na teoria física). Então, ele estabelece uma definição “compreensível” de elemento de realidade, tomada como uma condição “suficiente”, assumindo que (S2): *“If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e.. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity”* (se, sem perturbarmos o sistema de nenhuma forma, pudermos prever com certeza (i.e. com probabilidade igual à unidade) o valor de uma grandeza física, então existe um elemento de realidade física correspondente a essa grandeza física).

Em [10] (página 2, segundo parágrafo), se admite que, para a teoria quântica, a descrição do comportamento de um sistema é “completamente caracterizada” pelo conceito de “estado”, ou função de onda. Além disso, no formalismo quântico, uma observável física  $A$  carrega consigo uma relação direta com um operador (hermitiano)  $\hat{A}$ . Se o estado  $|\Psi\rangle$  é tal que  $\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$ , com  $a$  sendo um valor numérico constante, então: *“... there is an element of physical reality corresponding to the physical quantity  $A$ ”* (há um elemento de realidade física correspondente à grandeza física  $A$  [que aqui é o número  $a$  associado ao operador  $\hat{A}$ ]).

Em mecânica quântica, se os operadores associados a duas observáveis não comutam,  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ , então (S3): *“the precise knowledge of one of them precludes such a knowledge of the other ... any attempt to determine the latter experimentally will alter the state of the system in such a way as to destroy the knowledge of the first”* (o conhecimento preciso de uma delas impossibilita o conhecimento da outra ... qualquer tentativa de determinar esta [a segunda grandeza] experimentalmente alterará o estado do sistema de maneira a destruir o conhecimento da primeira). Notamos aqui que essa declaração é fundamental na discussão contida em [10]. EPR assume que toda a sua argumentação não viola S3. Como veremos, esse não é exatamente o caso.

Considerando a concepção de realidade de EPR (S2 acima), sempre que um estado  $|\Psi\rangle$  atribuir realidade para  $\hat{A}$  ( $\hat{B}$ ), ele não poderá também atribuir realidade para  $\hat{B}$  ( $\hat{A}$ ). Porém, se objetivamente tanto  $\hat{A}$  quanto  $\hat{B}$  podem ter “*simultaneous reality*” (realidade simultânea), então, de acordo com S1, a representação do sistema dada por  $|\Psi\rangle$  não pode ser completa [10] (página 2, sétimo parágrafo). Tais argumentos em EPR levam à conclusão S4: *“Either (1) the quantum-mechanical description of reality given by the wave function is not complete or (2) when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality”* (Ou (1) a descrição quântica da realidade dada pela função de onda não é completa ou (2) quando operadores correspondentes a duas grandezas físicas não comutam, essas grandezas não podem ter realidade simultânea).

### 6.3.2 Argumentos EPR que sustentam que a mecânica quântica não é completa

Após elaborar as ideias apresentadas, EPR apresenta um contexto físico a partir do qual deve-se concluir indiscutivelmente que a mecânica quântica não é completa. Essa

situação pode ser resumida como se segue.

O emaranhamento entre os sistemas I e II elimina qualquer possibilidade de se estabelecer independentemente a realidade dos sistemas I ou II apenas através da evolução temporal de  $|\Psi\rangle$ . De fato, “*This, according to quantum mechanics, can be done only with the help of further measurements, by a process known as the reduction of the wave packet*” (Isto, de acordo com a mecânica quântica, pode ser feito apenas com a ajuda de medidas posteriores, por um processo conhecido como redução do pacote de onda). A esse respeito [10] (página 3, parágrafos 3-4), é um ponto central que qualquer das expansões de  $|\Psi\rangle$  (eq. 6.2) pode ser aferida através de medidas (mas não ambas).

De fato, invocando a condição EPR (c) (seção 6.1), ao se escolher inspecionar em  $t = \tau > T$  (figura 6.1) (i) o valor da observável  $\hat{C}$  para o sistema I, obtendo  $c_n$ , pode-se afirmar que para o sistema II o valor da observável  $\hat{A}$  será  $a_n$ , e o estado colapsado (logo após a medida) será  $|\Psi(t = \tau^+)\rangle = |c_n\rangle_I \otimes |a_n\rangle_{II}$ . Pelas mesmas razões, ao escolher se determinar (ii)  $\hat{D}$ , encontrando  $d_n$ , o valor de  $\hat{B}$  para II será necessariamente  $b_n$ , e o estado colapsado  $|\Psi(t = \tau^+)\rangle = |d_n\rangle_I \otimes |b_n\rangle_{II}$ . Assim, aquilo para o que olhamos no sistema I impõe, de acordo com S2, um elemento específico de realidade para o sistema II.

EPR então propõe, em acordo com um ponto de vista clássico, que relação espera de sistemas que não interajam (S5): “... *since at the time of measurement [ $t = \tau > T$ ] the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system. This is, of course, merely a statement of what is meant by the absence of an interaction between the two systems*” (... dado que no momento da medida os dois sistemas não mais interagem, não pode haver nenhuma mudança real no segundo sistema em consequência de algo que possa ser feito no primeiro sistema. Isto é, claro, simplesmente uma declaração do que significa a ausência de interação entre dois sistemas). S5 é, provavelmente, a definição mais controversa em [10], constituindo o ponto principal de debate para a maior parte das rejeições posteriores às conclusões de EPR (incluindo a famosa resposta de Bohr [12]). Assim, essa suposição merece uma análise mais cuidadosa. Iremos, entretanto, postergar essa discussão para uma seção posterior.

Continuando, EPR estabelece as implicações de S5 para as medidas propostas sobre os sistemas. A mecânica quântica não permite realidade definida para ambos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  se ações são feitas sobre II: medir  $\hat{A}$  em II iria alterar qualquer configuração prévia desse sistema associada à grandeza  $\hat{B}$ , e vice-versa (ver seção S3). Entretanto, “*as a consequence of two different measurements performed upon the first system, the second system may be left in state with two different wave functions*” (como consequência de duas medidas diferentes feitas no primeiro sistema [I], o segundo sistema [II] pode ser deixado em um estado com duas funções de onda diferentes), ou seja,  $|a_n\rangle_{II}$  em (i) e  $|b_n\rangle_{II}$  em (ii). Contudo, devido a S5, o que é feito em I não pode influenciar II e “*no real change can take place*” (nenhuma mudança real pode acontecer) em II. Assim, “... *it is possible to assign two different wave functions ... to the same reality*” (... é possível atribuir duas funções de onda diferentes ... para a mesma realidade). Dessa forma, tanto  $\hat{A}$  quanto  $\hat{B}$  constituem elementos de realidade simultâneos do sistema II.

Entretanto, as regras da mecânica quântica preveem que o estado final colapsado deveria ser único e descrever completamente o estado do sistema composto para  $t > \tau$ . Assim, a caracterização da função de onda após os resultados das medidas –  $|\Psi(t = \tau^+)\rangle = |c_n\rangle_I \otimes |a_n\rangle_{II}$  (não é um autoestado de  $\hat{B}$  para II) em um caso e  $|\Psi(t = \tau^+)\rangle = |d_n\rangle_I \otimes |b_n\rangle_{II}$  (não é um autoestado de  $\hat{A}$  para II) no outro – não está em acordo com a realidade alegadamente concorrente de  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .

Por fim, o último passo da argumentação EPR confronta o raciocínio estabelecido acima com a declaração S4. Embora a argumentação, e mesmo a lógica, por trás de tal passo tenha sido questionada (ver, e.g., [145, 146]), EPR argumenta que a negação de (2) em S4, isto é, “... *two physical quantities, with noncommuting operators, can have simultaneous reality*” (duas grandezas físicas, com operadores incompatíveis, não podem ter realidade simultânea), deve levar à verdade da alternativa (1) em S4. Assim, “We are thus forced to conclude that the quantum-mechanical description of physical reality given by wave functions is not complete” (somos então forçados a concluir que a descrição através da mecânica quântica da realidade física dada pela função de onda não é completa).

Como comentário final, EPR divaga sobre uma crítica possível de ser feita sobre sua construção (página 4, quarto parágrafo). Entretanto, tal observação não é relevante para os nossos propósitos aqui.

## 6.4 A análise EPR revisitada tendo em vista as condições de incompatibilidade para estados EPR

Como já discutido, a argumentação em [10] é: (1a) considerar um tipo de sistema específico permitido pela mecânica quântica, o estado EPR  $|\Psi\rangle$  dado pela equação (6.2); (1b) tomar como válidas todas as regras da mecânica quântica, inclusive as que governam  $|\Psi\rangle$ ; e (2) assumir como verdadeiras duas suposições adicionais, S2 e S5 (ver, respectivamente, seções 6.3.1 e 6.3.2), que são suposições que não pertencem ao escopo tradicional da mecânica quântica. A conclusão EPR é de que, dentro da estrutura da mecânica quântica, (1)-(2) levam a problemas que impedem a descrição completa de um sistema por meio de um estado quântico. Para que tal argumentação seja logicamente consistente, é fundamental que (3) qualquer processo por que o sistema passe respeite estritamente (1b), sendo que de outra maneira não se estaria utilizando adequadamente a teoria que se pretende investigar.

Tipicamente, na literatura, críticas a EPR questionam (2) ao invés de (3). Como exemplo, refutações a EPR – incluindo a resposta histórica de Bohr [12] e a versão de spin-1/2 de Bohm [140] – não discutem, ao menos em termos gerais, a incompatibilidade entre as observáveis  $C$  e  $D$  do sistema I. Tomando Bohr [12], este considera a posição e momento de duas partículas em uma situação específica. Então argumenta que o princípio da incerteza ( $[\hat{C}, \hat{D}] = i\hbar$  para  $\hat{C} = \hat{x}$  e  $\hat{D} = \hat{p}$  em 1D) aplicado a este caso indica que o próprio arranjo experimental – planejado para determinar  $C$  ou  $D$  para I, interferindo com  $A$  ou  $B$  para II – deveria impedir a possibilidade, como contemplado por EPR, de



existir elementos de realidade simultâneos para as grandezas físicas  $A$  e  $B$ . O arranjo imaginado por Bohr para examinar indiretamente  $A$  ( $B$ ) não poderia ser usado para fazer o mesmo para  $B(A)$ . Baseado nesta situação particular, Bohr argumenta que S2 e S5 não são considerações apropriadas e compatíveis com realizações experimentais concretas para se medir estados do tipo EPR.

Outras críticas semelhantes a EPR (algumas inclusive considerando um ponto de vista mais matemático, ver [13, 147]) também dependem de situações particulares, considerando as especificidades de implementações experimentais em cada caso. Voltando a [12], o dispositivo para medir a posição e o momento (uma série de diafragmas com fendas fixadas a um anteparo) é um tipo de aparato experimental portátil (isto é, com todas suas partes muito próximas entre si). Entretanto, experimentos modernos medindo os spins de dois elétrons a 1,3km um do outro [51] ou dois átomos de rubídio separados por 398m [52] não se adequam a esse tipo de explicação dada por Bohr e outros autores.

De fato, supondo  $C$  e  $D$  totalmente arbitrários (uma consideração válida do ponto de vista teórico), não teríamos como especificar quais instrumentos de medida devem ser usados para o sistema I. Sendo assim, ficaria impossível evocar, baseando-se em algum princípio básico (mas determinado) da mecânica quântica, limitações técnicas que impedissem um certo arranjo experimental de determinar (indiretamente)  $A$  ou  $B$  para o sistema II. Por robustez, a mecânica quântica deveria permitir um argumento geral invalidando a conclusão EPR independente dos  $C$  e  $D$  escolhidos. Nosso objetivo é mostrar a seguir que (i) o tipo de informação que é possível adquirir de um estado EPR e (ii) o fato de que  $[\hat{C}, \hat{D}] \neq 0$ , fornecem justamente o argumento geral que procuramos, sem a necessidade de qualquer discussão a respeito da validade de S2 e S5.

Como ponto de partida, EPR supõe que, para os sistemas combinados  $|\Psi\rangle$  (com  $T < t < \tau$ ), não é possível “*calculate the state in which either one of the two systems is left after the interaction*” (calcular o estado em que cada um dos sistemas está [individualmente] após a interação). Em outras palavras,  $|\psi\rangle$ , por si mesmo, não é capaz de nos dizer o estado individual de cada sistema. Assim, da suposição EPR S2, deve-se assumir (sob as premissas da mecânica quântica, como feito em [10]) que não há elementos de realidade física para as observáveis  $C$ - $A$  ou  $D$ - $B$  para  $T < t < \tau$ . Mas se no tempo  $t = \tau$  nós determinamos  $C$  ( $D$ ) em I, isso necessariamente irá especificar o valor de  $A$  ( $B$ ) em II (condição EPR (c)). Dessa maneira, medindo uma observável pertinente, digamos de I, nós obtemos conhecimento combinado de duas grandezas, uma para cada sistema.

Seguindo [10], ou nós temos elementos de realidade física (obrigatoriamente) tanto para I como para II ou não temos para nenhum desses sistemas. Essa é uma consequência direta do que tradicionalmente se chama em mecânica quântica de “redução do pacote de onda” (discutido em [10]) aliada à estrutura básica de um estado EPR (eq. 6.2). É importante mencionar que a afirmação anterior não está em conflito com designar (baseado em S2) individualmente um elemento de realidade física a cada sistema, justamente a postura assumida em EPR. Para  $t > \tau$ , as regras da mecânica quântica afirmam que qualquer processo envolvendo II (I) irá depender apenas do fato de que o referido sistema se tornou um autoestado de  $A$  ou  $B$  ( $C$  ou  $D$ ) em  $t = \tau$ , e não de características de I (II).

O sistema se tornou separável com a “redução” de  $|\Psi\rangle$ .

Um ponto fundamental, entretanto, é como os dois “elementos de realidade física” vieram a existir. Este é um aspecto relevante a respeito de estados EPR que não pode ser negligenciado. Nas medições propostas em [10], um elemento de realidade física para I só é possível porque II também adquiriu um elemento de realidade física. Embora esses elementos de realidade física sejam independentes (no sentido descrito acima), sua existência mútua é profundamente correlacionada. Imperativo frisar que aqui não estamos apenas tratando de uma questão semântica. Existe uma consequência física concreta: restrições ao que é possível determinar a respeito do sistema I também impõem restrições ao que é possível saber sobre o sistema II. Assim, a informação obtida após examinar  $|\psi\rangle$  é caracterizada por uma das duas seguintes situações possíveis:

$$\mathcal{M}_C \equiv (c_n|_I; a_n|_{II}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_D \equiv (d_n|_I; b_n|_{II}). \quad (6.9)$$

$(x|_I; y|_{II})$  significa que temos necessariamente  $x$  para I e  $y$  para II. Ademais, tais valores podem ser verificados com 100% de certeza por qualquer medição subsequente de  $C$  e  $A$  ou  $D$  e  $B$ . Assim, de acordo com S2, os elementos de realidade física são descritos por  $\mathcal{M}_C$  ( $\mathcal{M}_D$ ), como descritos na equação (6.9).

As considerações anteriores, sozinhas, não constituem obstáculo para a lógica desenvolvida em [10]. Entretanto, agora iremos considerar explicitamente que  $[\hat{C}, \hat{D}] \neq 0$ . Para tal, é válido recordar o seguinte. Da incompatibilidade entre  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  (para II), S3 previne a existência de elementos de realidade simultâneos para esses observáveis caso se tente (como frisado em [10]) medir diretamente II. O modo como EPR eventualmente contorna essa dificuldade é examinar, ao invés de II, o sistema I.

Entretanto, como  $[\hat{C}, \hat{D}] \neq 0$ , por consistência, também a partir de S3 temos que as grandezas  $C$  e  $D$  não podem ser elementos de realidade física simultâneos para I. Mas conhecer  $A$  para II só é possível se também soubermos  $C$  para I, isto é, eles necessariamente correspondem a elementos de realidade combinados, representados por  $\mathcal{M}_C$ . O mesmo sendo verdade a respeito de  $B$  em relação a  $D$ . Assim, a emergência de um “elemento de realidade física” (como proposto em S2) para I não pode ser dissociado do mesmo para II. Dado que  $C$  e  $D$  não podem ser tomados simultaneamente como elementos de realidade física, isso se estende a  $\mathcal{M}_C$  e  $\mathcal{M}_D$  e, consequentemente, também a  $A$  e  $B$ . Esse fato crucial está ausente na argumentação EPR. Note que se tivéssemos  $[\hat{C}, \hat{D}] = 0$  (e S2 e S5 fossem assumidas como verdadeiras), não haveria incompatibilidade entre  $C$  e  $D$ , e, portanto, também não entre  $\mathcal{M}_C$  e  $\mathcal{M}_D$ , de maneira que não haveria problemas na argumentação EPR (quanto a este ponto).

Como mencionado anteriormente, S5 é o principal alvo de críticas à análise EPR (ver a discussão e as muitas referências relevantes apresentadas em [148]). Porém, não é a proposta da presente contribuição revisar em detalhes, bem como reproduzir, as inúmeras críticas à S5 (e também à S2). Aqui, apenas consideramos aspectos concretos sobre a construção matemática da mecânica quântica junto a sua estrutura formal. Baseando-nos em correlações quânticas (o tema da presente tese) relacionando as observáveis de um



estado EPR  $|\Psi\rangle$  (e o tipo de informação que se pode obter medindo-o), argumentamos que a descrição de um sistema representado por  $|\Psi\rangle$  não é incompleta. Assim, a mecânica quântica pode vir a ser considerada incompleta, mas em nossa opinião não pelas razões propostas em [10].

## 6.5 A matriz de transformação para sistemas de spin 1/2 com base com direção arbitrária

Para  $\gamma$ ,  $\theta$ , and  $\phi$ , sendo o primeiro, segundo e terceiro ângulos de Euler, e  $\mathbf{n} \equiv (\sin[\theta] \cos[\phi], \sin[\theta] \sin[\phi], \cos[\theta])$  representando uma direção arbitrária, o spin 1/2 em tal direção é dado pelo operador ( $\hbar = 1$ ) [149]

$$\hat{S}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos[\theta] & \exp[-i\phi] \sin[\theta] \\ \exp[+i\phi] \sin[\theta] & -\cos[\theta] \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Além disso, os autovetores de  $\hat{S}_{\mathbf{n}}$  são dados por [149]

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}, +1/2\rangle &= \exp[-i\frac{\gamma}{2}] \begin{pmatrix} +\exp[-i\phi/2] \cos[\theta/2] \\ +\exp[+i\phi/2] \sin[\theta/2] \end{pmatrix}, \\ |\mathbf{n}, -1/2\rangle &= \exp[+i\frac{\gamma}{2}] \begin{pmatrix} -\exp[-i\phi/2] \sin[\theta/2] \\ +\exp[+i\phi/2] \cos[\theta/2] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dessa maneira, uma transformação de base, escrita como

$$|\mathbf{n}'', \pm 1/2\rangle = \Gamma_{+\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')} |\mathbf{n}', +1/2\rangle + \Gamma_{-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}}^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')} |\mathbf{n}', -1/2\rangle \quad (6.12)$$

leva a uma matriz unitária, cujos elementos são (com  $\Delta_\phi = (\phi'' - \phi')/2$ ,  $\Delta_\theta^{(\pm)} = (\theta'' \pm \theta')/2$ , e  $\Delta_\gamma^{(\pm)} = (\gamma'' \pm \gamma')/2$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_{+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}}^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')} &= \exp[-i\Delta_\gamma^{(-)}] \left( +\cos[\Delta_\phi] \cos[\Delta_\theta^{(-)}] - i \sin[\Delta_\phi] \cos[\Delta_\theta^{(+)}] \right), \\ \Gamma_{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}}^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')} &= \exp[-i\Delta_\gamma^{(+)}] \left( +\cos[\Delta_\phi] \sin[\Delta_\theta^{(-)}] + i \sin[\Delta_\phi] \sin[\Delta_\theta^{(+)}] \right), \\ \Gamma_{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')} &= \exp[+i\Delta_\gamma^{(+)}] \left( -\cos[\Delta_\phi] \sin[\Delta_\theta^{(-)}] + i \sin[\Delta_\phi] \sin[\Delta_\theta^{(+)}] \right), \\ \Gamma_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')} &= \exp[+i\Delta_\gamma^{(-)}] \left( +\cos[\Delta_\phi] \cos[\Delta_\theta^{(-)}] + i \sin[\Delta_\phi] \cos[\Delta_\theta^{(+)}] \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

A partir de uma análise direta da equação (6.13), encontra-se que os elementos da matriz  $\Gamma^{(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}'')}$  anulam-se apenas para as combinações de ângulos  $\theta''$ ,  $\theta'$ ,  $\phi''$ ,  $\phi'$  que resultem em  $\mathbf{n}'' = \pm \mathbf{n}'$ . Assim, para  $\mathbf{n}''$  e  $\mathbf{n}'$  diferentes ou antiparalelos, a estrutura de  $\Gamma$  é a mesma que a de transformações entre bases ortonormais associadas a operadores não-comutáveis. Entretanto, isso é, de fato, uma consequência de  $[\hat{J}_{\mathbf{n}'}, \hat{J}_{\mathbf{n}''}] = 0$  se e somente se  $\mathbf{n}'' = \pm \mathbf{n}'$

(o sinal de menos levando em conta casos como  $\theta'' = 0$  e  $\theta' = \pi$ , de maneira que  $\hat{J}_{\mathbf{n}''} = \hat{J}_z$  e  $\hat{J}_{\mathbf{n}'} = -\hat{J}_z$ ).

## 6.6 Tipos de observáveis discretas e tipos de operadores correspondentes considerados para a construção de estados EPR.

Nesta seção, nos aprofundamos em uma importante característica de mudanças entre bases contáveis de um espaço de Hilbert separável  $\mathcal{H}$ . Para tal, começaremos resumindo os fatos a respeito do espectro  $\sigma(\hat{A})$  de um operador auto-adjunto geral  $\hat{A}$  que sejam indispensáveis aos nossos propósitos. Para uma consideração detalhada do assunto, sugerimos [137, 150] (e no contexto particular de mecânica quântica, mencionamos [151–153]).

Um número real  $a \in \sigma(\hat{A})$  se e somente se o resolvente  $\hat{R}_{\hat{A}}(a) \equiv (\hat{A} - a \mathbb{1})^{-1}$  não é um operador limitado no domínio de  $\hat{A}$ .  $\sigma(\hat{A})$  é dado pela união dos conjuntos não necessariamente disjuntos  $\sigma_{pp}(\hat{A})$ ,  $\sigma_{ac}(\hat{A})$ ,  $\sigma_{sc}(\hat{A})$ , os espectros, respectivamente, puramente pontual, absolutamente contínuo, e singular contínuo. Estados associados a cada um desses conjuntos (veja, e.g., [137]) formam três subespaços mutuamente ortogonais,  $\mathcal{H}_{pp}$ ,  $\mathcal{H}_{ac}$ , e  $\mathcal{H}_{sc}$ , todos invariantes sob  $\hat{A}$ . Assim,  $\mathcal{H}$  pode ser escrito como a soma direta

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}. \quad (6.14)$$

Fisicamente, para Hamiltonianos quânticos tradicionais, as partes puramente pontuais e absolutamente contínuas do espectro são associadas, respectivamente, aos estados ligados e estados de espalhamento [154–156]. Menos frequentes, Hamiltonianos com potenciais aleatórios por possuir  $\sigma_{sc}$  não vazio [157–159]. Neste caso, o espectro contínuo singular pode ser relacionado ao fenômeno de localização de Anderson [155].

Nosso foco se dará apenas em bases contáveis, isto é, do tipo descrito na equação (6.4). Apresentamos três razões. Primeiro, estados EPR são vitais para testar certas previsões fundamentais da mecânica quântica, como as desigualdades de Bell [160]. Embora algumas propostas teóricas [161] e mesmo planejamentos esquematizados [162, 163] sejam baseados em variáveis contínuas (pode-se ver uma revisão do tema em [164]), importantes experimentos [16, 19, 130–133], assim como experimentos atuais com alta precisão [51, 165–167], são todos baseados em observáveis quânticas discretas. Segundo, o teorema espectral para operadores auto-adjuntos é de fato válido em termos bem gerais [168]. Ainda assim, determinar matematicamente propriedades de mudanças entre bases contínuas (como as da seção 6.2.2) pode exigir um cuidado técnico adicional, nos distraindo da questão conceitual de que queremos tratar neste trabalho. Notamos aqui que para tratar de bases associadas a operadores como de posição e momento, é necessário lidar com autovetores generalizados em um espaço de Hilbert “*rigged*” (equipado). Em terceiro lugar, não é incomum a crença de que as medidas propostas no artigo EPR [10], alegadamente apontando para a incompleteza da mecânica quântica, envolvem apenas posição e momento. De fato, em [10] essas grandezas são utilizadas como exemplo de como um único

estado pode ser expandido em diferentes bases, formadas por autoestados de operadores não-comutáveis. Entretanto, nos argumentos finais de EPR (conferir com as equações (7) e (8) em [10]), os estados são geralmente escritos em termos de bases discretas (para detalhes, ver seção 6.2).

Desta forma, serão significantes, e tomados como observáveis adequadas para estados EPR, autovalores de conjuntos de espectro  $\sigma_p(\hat{A})$ :  $a$  pertence a  $\sigma_p(\hat{A})$  se há ao menos um autovetor  $|a\rangle$  no domínio de  $\hat{A}$  tal que a equação  $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$  seja verdadeira. Dado que  $\sigma_p(\hat{A})$  é um subconjunto de  $\sigma_{pp}(\hat{A})$ , todos os autovetores  $|a\rangle$  estão no subespaço  $\mathcal{H}_{pp}$ . Para  $\mathcal{H}$  finito (como exemplo, o espaço de spin-1/2),  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_{pp}(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A})$ .

O número de aparecimentos (em mecânica quântica, degenerescência) de um autovalor  $a$  dá a dimensão do autoespaço de  $a$ . De maneira simples, a degenerescência de  $a$  é o número de autovetores, diferentes entre si, que satisfaçam a equação de autovalores.  $a \in \sigma_p(\hat{A})$  apenas se esse número é finito. Como exemplo, para um elétron em um campo magnético, nós temos os conhecidos níveis de Landau. A função de onda para esse caso possui uma “componente” de onda plana, tornando os níveis de Landau infinitamente degenerados e os estados correspondentes não estão contidos em  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , e assim não são autoestados de fato em  $\mathcal{H}$  [153, 169].

Por último, para  $\hat{A}$  auto-adjunto (com  $\sigma_p(\hat{A})$  não nulo), o conjunto de autovetores forma uma base apropriada para  $\mathcal{H}$  quando (a)  $D$  é finito [137]. Por outro lado, para  $D = \infty$  isso também é verdade para dois outros casos de interesse em mecânica quântica: (b) se  $\hat{A}$  é compacto [170]; (c) para  $\hat{A}$  pertencendo a certas classes de operadores não limitados [171]. Como exemplo para (b), considere um potencial atrativo não muito singular (como o átomo de Hidrogênio [172]). Então,  $\hat{A}$  corresponderia à restrição [173] do Hamiltoniano total a um sub-espaço descrevendo apenas os estados ligados do sistema [152, 172]. Para (c), podemos citar  $\hat{A}$  como os hamiltonianos  $\hat{H}_{conf}$  de potenciais de confinamento, como o oscilador harmônico [173] (para potenciais não-analíticos, e.g., o poço quadrado infinito, técnicas de extensão auto-adjuntas também podem levar ao  $\hat{A} = \hat{H}_{conf}$  adequado [174–176]).

## Conclusões

Começamos nosso trabalho obtendo alguns resultados para a medida  $C$  que não havíamos obtido quando a propomos [43]. Estabelecemos uma normalização adequada a ela, verificamos que estados GHZ generalizados para muitos níveis a maximizam e demonstramos que  $C$  e o método da distância são equivalentes para sistemas bipartidos complexos. Com isso, consolidamos nosso entendimento da proposta, compreendendo sua funcionalidade, interpretação, limitações e posicionamento frente a outras medidas estabelecidas na literatura.

Criamos um método para construir medidas de emaranhamento que utiliza  $C$  como restrição a ser obedecida. Como  $C$  é uma medida extremamente simples, ela é propícia para tal uso. Esse método baseia-se na “deformação” dos coeficientes de um estado, de maneira que ele adquira as configurações de um estado separável. Esses “coeficientes de deformação” são utilizados como argumentos de uma função a ser minimizada, de modo a aferir o emaranhamento do estado. O fato de esse método ser definido de forma geral, podendo-se utilizar diversas funções no processo de minimização, pode torná-lo adaptável a diferentes casos, com a função sendo escolhida conforme as necessidades do problema proposto. Exploramos essa formulação para um caso simples, de sistemas de dois qubits, demonstrando qual função podemos escolher para recairmos no método da distância. Saindo um pouco do escopo de emaranhamento, analisamos a minimização da distância Manhattan entre um estado emaranhado e o não emaranhado mais próximo dele. Fizemos um estudo analítico para estados de dois qubits com coeficientes reais, encontrando todas as soluções possíveis para esse caso.

Partindo de uma análise a respeito do ordenamento de estados multipartidos, comparamos como algumas medidas de emaranhamento ordenavam os estados  $|\psi_{GHZ-4}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle)$  e  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Das duas, o método da distância e  $R_E^2$ , apresentadas no capítulo 2, caracterizam  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$  como mais emaranhado do que  $|\psi_{GHZ-4}\rangle$ . Para  $C$ , temos  $C(|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle) = C(|\psi_{GHZ-4}\rangle) = 1$ , os dois estados maximizando a medida. Podemos notar uma importante diferença entre esses estados: ao interferir com uma parte de  $|\psi_{GHZ-4}\rangle$ , afetamos em maior grau o resto do estado do que ao fazê-lo com  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ . Nos propusemos então a estimar quantitativamente tal aspecto dos estados, aferindo o grau de interdependência entre as partes de um

sistema, e como o colapso de uma dessas partes pode fornecer informação a respeito das outras.

Impusemos duas restrições a nossa proposta, chamada  $\mathbb{F}$ : ser positiva ou nula de modo geral, e para estados separáveis ser nula. Como em um estado separável ações feitas em uma parte não afetam as outras, é coerente que a medida seja nula para esses casos. Ao mesmo tempo, como o modo como se interfere no estado determina o modo como este se modifica, as observáveis que se escolhe medir influenciam o valor de  $\mathbb{F}$ . Assim, ao contrário de uma medida de emaranhamento, a nossa grandeza apresenta dependência com a base utilizada para se representar o estado.

$\mathbb{F}$  consiste em uma função padrão que se molda de acordo com funções auxiliares que escolhemos para inserir na forma funcional em (5.35). Apresentamos duas propostas a partir dessa função padrão, uma utilizando  $C$  e outra a entropia de Shannon aplicada a uma variável aleatória construída a partir de um estado quântico, denominadas  $F_C$  e  $F_H$ .  $F_C$  mede o quanto, na média, medições locais em partes de um estado podem destruir de seu emaranhamento. Consequentemente,  $F_C$  também aponta quão mais perto de serem separáveis, e portanto descritas por estados puros, se tornam essas partes. Essa maior proximidade de ser descrito por um estado separável pode ser tomada como um ganho de informação em relação às partes do sistema.  $F_H$ , por sua vez, calcula como uma medida local em uma parte pode diminuir a incerteza associada a medidas locais em outras partes do estado. Verificamos que ambas respeitam as restrições impostas, e diferenciam os casos paradigmáticos,  $|\psi_{GHZ-4}\rangle$  e  $|\psi_{Bell\otimes Bell}\rangle$ , satisfatoriamente. Verificamos também, entre outras propriedades, condições de maximização para  $F_C$ .

Pretendemos, futuramente, explorar as possibilidades geradas pelas medidas propostas na presente tese, encontrando situações e arranjos em que seja vantajoso usá-las como método de quantificação de correlações quânticas. Como diferentes medidas destacam diferentes aspectos das correlações, poderíamos caracterizar em que casos cada uma delas teria seu uso mais indicado. Isso pode ser feito, por exemplo, utilizando diferentes funções de penalização no método proposto no capítulo 4. Esse método possui abertura para inserir-se vínculos além dos referentes ao emaranhamento e, assim, também pode ser propício a situações em que existam vínculos que precisem ser levados em conta ao se trabalhar com o sistema. Também consideramos a possibilidade de tentar construir uma função na forma  $\mathbb{F}$  tal que seja aplicável para estados mistos, além de encontrar, ou elaborar, situações experimentais em que seu cálculo seja relevante. Além disso, assim como utilizamos  $C$  e a entropia de Shannon para construir  $F_C$  e  $F_H$ , podemos verificar a viabilidade de utilizarmos outras funções, e as vantagens que podemos obter com isso.

## Referências

- [1] G. Gamow. *Thirty Years that Shook Physics: The Story of Quantum Theory*. Dover books Explaining Science (Dover Publications, 1985).
- [2] A. Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Fundamental Theories of Physics (Springer, 1995).
- [3] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics* (Springer, 1994).
- [4] R. Resnick. *Introduction to Special Relativity* (John Wiley & Sons Canada, Limited, 1968).
- [5] W. Rindler. *Introduction to special relativity*. Oxford science publications (Clarendon Press, 1991).
- [6] W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. Em *Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten*, páginas 382–396 (Springer, 1985).
- [7] E. Schrödinger. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review* **28**, 1049–1070 (1926).
- [8] J. Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Investigations in physics (Princeton University Press, 1955).
- [9] M. Jammer. *The philosophy of quantum mechanics* (Wiley, 1974).
- [10] A. Einstein, B. Podolsky e Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review* **47**, 777–780 (1935).
- [11] E. Schrödinger. Die gegenwertige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften* **23**, pp.807–812; 823–828; 844–849 (1935).
- [12] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* **48**, 8, 696 (1935).
- [13] G. Bacciagaluppi. Did Bohr Understand EPR? (2014).

- [14] J. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics* **1**, 195–200 (1964).
- [15] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters* **23**, 880–884 (1969).
- [16] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell’s Inequalities. *Physical Review Letters* **49**, 91–94 (1982).
- [17] Z. Y. Ou e L. Mandel. Violation of Bell’s Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment. *Physical Review Letters* **61**, 50–53 (1988).
- [18] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko e Y. Shih. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. *Physical Review Letters* **75**, 4337–4341 (1995).
- [19] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden e N. Gisin. Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart. *Physical Review Letters* **81**, 3563–3566 (1998).
- [20] Y. Hasegawa, R. Loidl, G. Badurek, M. Baron e H. Rauch. Violation of a Bell-like inequality in neutron optical experiments: quantum contextuality. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, S7–S12 (2004).
- [21] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B. Omer, M. Furst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodnik, C. Barbieri, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Entanglement-based quantum communication over 144 km. *Nature Physics* **3**, 481 – 486 (2007).
- [22] R. F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A* **40**, 8, 4277 (1989).
- [23] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, Horodecki e Karol. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics* **81**, 865–942 (2009).
- [24] A. K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Physical Review Letters* **67**, 661–663 (1991).
- [25] C. H. Bennett e S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Physical Review Letters* **69**, 2881–2884 (1992).
- [26] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters* **70**, 1895–1899 (1993).
- [27] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu. Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Physical Review Letters* **80**, 1121–1125 (1998).



- [28] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature* **390**, 6660, 575–579 (1997).
- [29] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik. Unconditional quantum teleportation. *Science* **282**, 5389, 706–709 (1998).
- [30] T. Jennewein, C. Simon, G. Weihs, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Quantum Cryptography with Entangled Photons. *Physical Review Letters* **84**, 4729–4732 (2000).
- [31] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat e A. Zeilinger. Dense Coding in Experimental Quantum Communication. *Physical Review Letters* **76**, 4656–4659 (1996).
- [32] D. S. Naik, C. G. Peterson, A. G. White, A. J. Berglund e P. G. Kwiat. Entangled State Quantum Cryptography: Eavesdropping on the Ekert Protocol. *Physical Review Letters* **84**, 4733–4736 (2000).
- [33] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted. *Physical Review Letters* **80**, 3891–3894 (1998).
- [34] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden e N. Gisin. Quantum Cryptography Using Entangled Photons in Energy-Time Bell States. *Physical Review Letters* **84**, 4737–4740 (2000).
- [35] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge Series on Information and the Natural Sciences)* (Cambridge University Press, 2004), 1 edição.
- [36] A. Montanaro. Quantum algorithms: an overview. *npj Quantum Information* **2**, 15023 (2016).
- [37] P. W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review* **41**, 2, 303–332 (1999).
- [38] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh e V. Vedral. Entanglement in many-body systems. *Reviews of Modern Physics* **80**, 2, 517 (2008).
- [39] I. Chattopadhyay e D. Sarkar. Entanglement of Formation is Non-monotonic with Concurrence: A Simple Proof. *Quantum Information Processing* **7**, 6, 243–249 (2008).
- [40] W. H. Zurek e J. P. Paz. Decoherence, chaos, and the second law. *Physical Review Letters* **72**, 2508–2511 (1994).
- [41] T. Baumgratz, M. Cramer e M. Plenio. Quantifying coherence. *Physical Review Letters* **113**, 14, 140401 (2014).



- [42] G. Adesso, T. R. Bromley e M. Cianciaruso. Measures and applications of quantum correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **49**, 47, 473001 (2016).
- [43] D. F. Orsini. *Estudo de Uma Proposta de Medida de Emaranhamento para Estados Puros: Comparação com outros Procedimentos e uma Visualização Geométrica*. Tese de Mestrado, UFPR (2014).
- [44] D. Bohm e Y. Aharonov. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review* **108**, 4, 1070 (1957).
- [45] J. Audretsch. *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics* (Wiley, Weinheim, 2007).
- [46] B. S. Cirel'son. Quantum generalizations of Bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics* **4**, 2, 93–100 (1980).
- [47] A. Garg e N. D. Mermin. Detector inefficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment. *Physical Review D* **35**, 12, 3831 (1987).
- [48] P. H. Eberhard. Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment. *Physical Review A* **47**, 2, R747 (1993).
- [49] J. Barrett, D. Collins, L. Hardy, A. Kent e S. Popescu. Quantum nonlocality, Bell inequalities, and the memory loophole. *Physical Review A* **66**, 4, 042111 (2002).
- [50] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani e S. Wehner. Bell nonlocality. *Reviews of Modern Physics* **86**, 2, 419 (2014).
- [51] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenbergh, R. F. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellán et al.. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature* **526**, 7575, 682–686 (2015).
- [52] W. Rosenfeld, D. Burchardt, R. Garthoff, K. Redeker, N. Ortegel, M. Rau e H. Weinfurter. Event-Ready Bell Test Using Entangled Atoms Simultaneously Closing Detection and Locality Loopholes. *Physical Review Letters* **119**, 1, 010402 (2017).
- [53] L. Masanes, Y.-C. Liang e A. C. Doherty. All bipartite entangled states display some hidden nonlocality. *Physical Review Letters* **100**, 9, 090403 (2008).
- [54] M. B. Plenio e S. Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Information & Computation* **7**, 1, 1–51 (2007).
- [55] G. Vidal. Entanglement monotones. *Journal of Modern Optics* **47**, 2-3, 355–376 (2000).

- [56] D. Bruss. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 9, 4237–4251 (2002).
- [57] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A* **53**, 2046–2052 (1996).
- [58] S. Luo. Classicality versus quantumness in Born’s probability. *Physical Review A* **96**, 052126 (2017).
- [59] M. Hassani, C. Macchiavello e L. Maccone. Digital Quantum Estimation. *Physical Review Letters* **119**, 200502 (2017).
- [60] K. C. Tan, T. Volkoff, H. Kwon e H. Jeong. Quantifying the Coherence between Coherent States. *Physical Review Letters* **119**, 190405 (2017).
- [61] P. Mironowicz, J. K. Korbicz e P. Horodecki. Monitoring of the Process of System Information Broadcasting in Time. *Physical Review Letters* **118**, 150501 (2017).
- [62] H.-L. Shi, S.-Y. Liu, X.-H. Wang, W.-L. Yang, Z.-Y. Yang e H. Fan. Coherence depletion in the Grover quantum search algorithm. *Physical Review A* **95**, 032307 (2017). doi: 10.1103/PhysRevA.95.032307.
- [63] C. Majenz, M. Berta, F. Dupuis, R. Renner e M. Christandl. Catalytic Decoupling of Quantum Information. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 080503 (2017).
- [64] I. Marvian e R. W. Spekkens. How to quantify coherence: Distinguishing speakable and unspeakable notions. *Physical Review A* **94**, 052324 (2016).
- [65] U. Fano. Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques. *Reviews of Modern Physics* **29**, 74–93 (1957).
- [66] P. C. Lichtner e J. J. Griffin. Evolution of a Quantum System: Lifetime of a Determinant. *Physical Review Letters* **37**, 1521–1524 (1976).
- [67] J. I. Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza e H. E. Borges. Perturbative Expansion for Coherence Loss. *Physical Review Letters* **77**, 207–210 (1996).
- [68] Z. Ma, Z. Chen e S.-M. Fei. Genuine multipartite entanglement of superpositions. *Physical Review A* **90**, 032307 (2014).
- [69] N. Gigena e R. Rossignoli. Generalized conditional entropy optimization for qudit-qubit states. *Physical Review A* **90**, 042318 (2014).
- [70] T. Tanaka, G. Kimura e H. Nakazato. Possibility of a minimal purity-measurement scheme critically depends on the parity of dimension of the quantum system. *Physical Review A* **87**, 012303 (2013).

- [71] M. Huber e J. I. de Vicente. Structure of Multidimensional Entanglement in Multipartite Systems. *Physical Review Letters* **110**, 030501 (2013).
- [72] E. Chitambar. Quantum correlations in high-dimensional states of high symmetry. *Physical Review A* **86**, 032110 (2012).
- [73] R. Rossignoli, N. Canosa e L. Ciliberti. Generalized entropic measures of quantum correlations. *Physical Review A* **82**, 052342 (2010).
- [74] T.-C. Wei e P. M. Goldbart. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Physical Review A* **68**, 042307 (2003).
- [75] J.-D. Shi, D. Wang e L. Ye. Comparative explorations of the revival and robustness for quantum dynamics under decoherence channels. *Quantum Information Processing* **15**, 4, 1649–1659 (2016).
- [76] Q. Li, J. Cui, S. Wang e G.-L. Long. Study of a monogamous entanglement measure for three-qubit quantum systems. *Quantum Information Processing* **15**, 6, 2405–2424 (2016).
- [77] Q. Zhu, C. Ding, S. Wu e W. Lai. Geometric measure of quantum correlation: The influence of the asymmetry environments. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **458**, 67–75 (2016).
- [78] B. Regula e G. Adesso. Geometric approach to entanglement quantification with polynomial measures. *Physical Review A* **94**, 2, 022324 (2016).
- [79] M. Enríquez, I. Wintrowicz e K. Życzkowski. Maximally entangled multipartite states: a brief survey. Em *Journal of Physics: Conference Series*, volume 698, página 012003 (IOP Publishing, 2016).
- [80] D. A. Meyer e N. R. Wallach. Global entanglement in multiparticle systems. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 9, 4273–4278 (2002).
- [81] J. Shi, Z. Ding, J. He, T. Wu e D. Wang. Renormalization of global entanglement and Bell nonlocality in the Ising model with a transverse field. *Quantum Information Processing* **16**, 12, 311 (2017).
- [82] S. d. Ouyang, X. W. Mi, Y. B. Zhou, X. W. Chen e K. H. Song. Quantum phase transition and entanglement of one-dimensional spinless fermion model. *International Journal of Modern Physics B* **30**, 32, 1650235 (2016).
- [83] A. C. Lai, M. Pedicini e S. Rognone. Quantum entanglement and the Bell matrix. *Quantum Information Processing* **15**, 7, 2923–2936 (2016).
- [84] L. Arnaud. All possible permutational symmetries of a quantum system. *Physical Review A* **93**, 1, 012320 (2016).

- [85] G. Tóth, T. Moroder e O. Gühne. Evaluating convex roof entanglement measures. *Physical Review Letters* **114**, 16, 160501 (2015).
- [86] G. K. Brennen. An Observable Measure of Entanglement for Pure States of Multi-qubit Systems. *Quantum Information & Computation* **3**, 6, 619–626 (2003).
- [87] G. Rigolin, T. R. de Oliveira e M. C. de Oliveira. Operational classification and quantification of multipartite entangled states. *Physical Review A* **74**, 2, 022314 (2006).
- [88] R. Jozsa. Entanglement and quantum computation. arXiv preprint quant-ph/9707034 (1997).
- [89] R. Jozsa e N. Linden. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. Em *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 459, páginas 2011–2032 (The Royal Society, 2003).
- [90] P. W. Shor. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. Em *Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on*, páginas 124–134 (Ieee, 1994).
- [91] E. Knill e R. Laflamme. Power of one bit of quantum information. *Physical Review Letters* **81**, 25, 5672 (1998).
- [92] A. Datta, S. T. Flammia e C. M. Caves. Entanglement and the power of one qubit. *Physical Review A* **72**, 4, 042316 (2005).
- [93] L. Henderson e V. Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of physics A: mathematical and general* **34**, 35, 6899 (2001).
- [94] W. Zurek. Einselection and Decoherence from an Information Theory Perspective. *Annalen der Physik (Leipzig)* **9**, 5, 853–862 (2000).
- [95] H. Ollivier e W. H. Zurek. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Physical Review Letters* **88**, 1, 017901 (2001).
- [96] S. Hill e W. K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Physical Review Letters* **78**, 5022–5025 (1997).
- [97] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters* **80**, 10, 2245–2248 (1998).
- [98] D. M. Greenberger, M. A. Horne e A. Zeilinger. Going beyond Bell’s theorem. Em *Bell’s theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, páginas 69–72 (Springer, 1989).
- [99] B. Aharon e M. Kavan. Criteria for measures of quantum correlations. *Quantum Information & Computation* **12**, 0721–42 (2011).

- [100] F. F. Fanchini, D. d. O. S. Pinto e G. Adesso. *Lectures on General Quantum Correlations and Their Applications* (Springer, 2017).
- [101] A. Cabello, S. Severini e A. Winter. (Non-) contextuality of physical theories as an axiom. arXiv preprint arXiv:1010.2163 (2010).
- [102] R. Harper, R. J. Chapman, C. Ferrie, C. Granade, R. Kueng, D. Naoumenko, S. T. Flammia e A. Peruzzo. Explaining quantum correlations through evolution of causal models. *Physical Review A* **95**, 4, 042120 (2017).
- [103] S. J. Akhtarshenas, H. Mohammadi, S. Karimi e Z. Azmi. Computable measure of quantum correlation. *Quantum Information Processing* **14**, 1, 247–267 (2015).
- [104] H. Cao, Z.-Q. Wu, L.-Y. Hu, X.-X. Xu e J.-H. Huang. An easy measure of quantum correlation. *Quantum Information Processing* **14**, 11, 4103–4112 (2015).
- [105] T. Chanda, T. Das, D. Sadhukhan, A. K. Pal, A. Sen, U. Sen et al.. Reducing computational complexity of quantum correlations. *Physical Review A* **92**, 6, 062301 (2015).
- [106] G. B. Furman, S. D. Goren, V. M. Meerovich e V. L. Sokolovsky. Generation of quantum correlations at adiabatic demagnetization. *Journal of Physics Communications* **1**, 4, 045009 (2017).
- [107] F. Shahandeh, A. P. Lund e T. C. Ralph. Quantum Correlations in Nonlocal Boson Sampling. *Physical Review Letters* **119**, 12, 120502 (2017).
- [108] F. Shahandeh, A. P. Lund e T. C. Ralph. Quantum Correlations and Global Coherence in Distributed Quantum Computing. arXiv preprint arXiv:1706.00478 (2017).
- [109] A. Y. Chernyavskiy. Calculation of quantum discord and entanglement measures using the random mutations optimization algorithm. arXiv preprint arXiv:1304.3703 (2013).
- [110] E. Krause. *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Dover Books on Mathematics Series (Dover Publications, 1975).
- [111] E. Lima. *Espaços métricos*. Projeto Euclides (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2003).
- [112] K. Hyatt, J. R. Garrison e B. Bauer. Extracting Entanglement Geometry from Quantum States. *Physical Review Letters* **119**, 140502 (2017).
- [113] A. Jagannath e T. Trogdon. Random matrices and the New York City subway system. *Physical Review E* **96**, 030101 (2017).
- [114] Q. Chen, J.-H. Qian, L. Zhu e D.-D. Han. Optimal transport in time-varying small-world networks. *Physical Review E* **93**, 032321 (2016).

- [115] S. D. S. Reis, A. A. Moreira e J. S. Andrade. Nonlocal product rules for percolation. *Physical Review E* **85**, 041112 (2012).
- [116] H. Li, S. Wang, J. Cui e G. Long. Quantifying entanglement of arbitrary-dimensional multipartite pure states in terms of the singular values of coefficient matrices. *Physical Review A* **87**, 042335 (2013).
- [117] D. L. Donoho. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal  $\ell_1$ -norm solution is also the sparsest solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **59**, 6, 797–829 (2006).
- [118] K. H. Lim, L. Ferraris, M. E. Filloux, B. J. Raphael e W. G. Fairbrother. Using positional distribution to identify splicing elements and predict pre-mRNA processing defects in human genes. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **108**, 27, 11093–11098 (2011).
- [119] J. Sköld. Ordering of Entangled States for Different Entanglement Measures (2014).
- [120] V. Erol, F. Ozaydin e A. A. Altintas. Analysis of entanglement measures and LOCC maximized quantum fisher information of general two qubit systems. *Scientific Reports* **4**, 5422 (2014).
- [121] J. I. de Vicente, C. Spee e B. Kraus. Maximally entangled set of multipartite quantum states. *Physical Review Letters* **111**, 11, 110502 (2013).
- [122] D. C. Santos. *Entanglement: from its mathematical description to its experimental observation*. Tese de Doutorado, Citeseer (2008).
- [123] F. G. Brandão e G. Gour. Reversible framework for quantum resource theories. *Physical Review Letters* **115**, 7, 070503 (2015).
- [124] V. Vedral. *Introduction to quantum information science* (Oxford University Press on Demand, 2006).
- [125] H. Everett III. “Relative state” formulation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics* **29**, 3, 454 (1957).
- [126] J. v. Neumann. Allgemeine eigenwerttheorie Hermitescher funktionaloperatoren. *Mathematische Annalen* **102**, 1, 49–131 (1930).
- [127] P. Jordan, J. von Neumann e E. P. Wigner. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Em *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, páginas 298–333 (Springer, 1993).
- [128] P. Jordan, J. von Neumann e E. P. Wigner. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Em *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, páginas 298–333 (Springer, 1993).

- [129] R. Arens e V. Varadarajan. On the concept of Einstein–Podolsky–Rosen states and their structure. *Journal of Mathematical Physics* **41**, 2, 638–651 (2000).
- [130] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time- Varying Analyzers. *Physical Review Letters* **49**, 1804–1807 (1982).
- [131] A. Aspect. Quantum mechanics: to be or not to be local. *Nature* **446**, 7138, 866 (2007).
- [132] P. R. Tapster, J. G. Rarity e P. Owens. Violation of Bell’s inequality over 4 km of optical fiber. *Physical Review Letters* **73**, 14, 1923 (1994).
- [133] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter e A. Zeilinger. Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions. *Physical Review Letters* **81**, 23, 5039 (1998).
- [134] P. E. Jørgensen, K. A. Kornelson e K. L. Shuman. *Iterated function systems, moments, and transformations of infinite matrices* (American Mathematical Soc., 2011).
- [135] C. M. Goertzen. *Operations on Infinite x Infinite Matrices and Their Use in Dynamics and Spectral Theory* (2013).
- [136] Y. S. Kim e M. Noz. *Theory and applications of the Poincaré group*, volume 17 (Springer Science & Business Media, 2012).
- [137] N. I. Akhiezer e I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space* (Courier Corporation, 2013).
- [138] P. R. Halmos. *A Hilbert space problem book*, volume 19 (Springer Science & Business Media, 2012).
- [139] D. Dutkay e P. Jorgensen. Fourier duality for fractal measures with affine scales. *Mathematics of Computation* **81**, 280, 2253–2273 (2012).
- [140] D. Bohm. *Quantum theory* (Courier Corporation, 2012).
- [141] E. G. Beltrametti e G. Cassinelli. *The logic of quantum mechanics*, volume 15 (Cambridge University Press, 2010).
- [142] S. Huang. Generalized einstein-podolsky-rosen states. *Journal of Mathematical Physics* **48**, 11, 112102 (2007).
- [143] M. Keyl, D. Schlingemann e R. F. Werner. Infinitely Entangled States. *Quantum Info. Comput.* **3**, 4, 281–306 (2003).
- [144] R. Shankar. *Principles of quantum mechanics* (Springer Science & Business Media, 2012).



- [145] G. Brassard e A. A. Méthot. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered in complete? *International Journal of Quantum Information* **4**, 01, 45–54 (2006).
- [146] G. Brassard e A. A. Méthot. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Correct? *Foundations of Physics* (2010).
- [147] H. Halvorson e R. Clifton. Reconsidering Bohrs reply to EPR. Em *Non-locality and Modality*, páginas 3–18 (Springer, 2002).
- [148] A. Fine. The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory. Em *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017).
- [149] M. Chaichian e R. Hagedorn. *Symmetries in Quantum Mechanics: From Angular Momentum to Supersymmetry* (CRC Press, 1997).
- [150] S. Hassani. *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations* (Springer Science & Business Media, 2013).
- [151] Y. Last. Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra. *Journal of Functional Analysis* **142**, 2, 406–445 (1996).
- [152] W. Thirring. *Quantum mathematical physics: atoms, molecules and large systems* (Springer Science & Business Media, 2013).
- [153] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*, volume 157 (American Mathematical Soc., 2014).
- [154] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch e B. Simon. *Schrödinger operators: With application to quantum mechanics and global geometry* (Springer, 2009).
- [155] Y. Last. Exotic spectra: a review of Barry Simon’s central contributions. Em *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 76, página 697 (Providence, RI; American Mathematical Society; 1998, 2007).
- [156] O. Tchebotareva. An Example of Embedded Singular Continuous Spectrum for One-Dimensional Schrödinger Operators. *Letters in Mathematical Physics* **72**, 3, 225–231 (2005).
- [157] D. B. Pearson. Singular continuous measures in scattering theory. *Communications in Mathematical Physics* **60**, 1, 13–36 (1978).
- [158] A. Kiselev, Y. Last e B. Simon. Modified Prüfer and EFQP transforms and the spectral analysis of one-dimensional Schrödinger operators. *Communications in mathematical physics* **194**, 1, 1–45 (1998).



- [159] C. Remling. Embedded singular continuous spectrum for one-dimensional Schrödinger operators. *Transactions of the American Mathematical Society* **351**, 6, 2479–2497 (1999).
- [160] J. S. Bell. EPR Correlations and EPW Distributions. *Annals of the New York Academy of Sciences* **480**, 1, 263–266 (1986).
- [161] J.-Å. Larsson. Bell inequalities for position measurements. *Physical Review A* **70**, 2, 022102 (2004).
- [162] A. F. Abouraddy, T. Yarnall, B. E. Saleh e M. C. Teich. Violation of Bells inequality with continuous spatial variables. *Physical Review A* **75**, 5, 052114 (2007).
- [163] D. Buono, G. Nocerino, S. Solimeno e A. Porzio. Different operational meanings of continuous variable Gaussian entanglement criteria and Bell inequalities. *Laser Physics* **24**, 7, 074008 (2014).
- [164] G. Adesso e F. Illuminati. Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **40**, 28, 7821 (2007).
- [165] M. Giustina, M. A. Versteegh, S. Wengerowsky, J. Handsteiner, A. Hochrainer, K. Phelan, F. Steinlechner, J. Kofler, J.-Å. Larsson, C. Abellán et al.. Significant-loop-hole-free test of Bells theorem with entangled photons. *Physical Review Letters* **115**, 25, 250401 (2015).
- [166] L. K. Shalm, E. Meyer-Scott, B. G. Christensen, P. Bierhorst, M. A. Wayne, M. J. Stevens, T. Gerrits, S. Glancy, D. R. Hamel, M. S. Allman et al.. Strong loop-hole-free test of local realism. *Physical Review Letters* **115**, 25, 250402 (2015).
- [167] B. Hensen, N. Kalb, M. Blok, A. Dréau, A. Reiserer, R. Vermeulen, R. Schouten, M. Markham, D. Twitchen, K. Goodenough et al.. Loop-hole-free Bell test using electron spins in diamond: second experiment and additional analysis. *Scientific reports* **6**, 30289 (2016).
- [168] H. Leinfelder. A geometric proof of the spectral theorem for unbounded self-adjoint operators. *Mathematische Annalen* **242**, 1, 85–96 (1979).
- [169] E. B. Davies. *Linear operators and their spectra*, volume 106 (Cambridge University Press, 2007).
- [170] R. Buck. Multiplication operators. *Pacific Journal of Mathematics* **11**, 1, 95–103 (1961).
- [171] K. Schmüdgen. *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, volume 265 (Springer Science & Business Media, 2012).

- [172] E. Cancès. Introduction to First-Principle Simulation of Molecular Systems. Em *Computational Mathematics, Numerical Analysis and Applications*, páginas 61–106 (Springer, 2017).
- [173] W. O. Amrein e W. O. Amrein. *Non-relativistic quantum dynamics*, volume 2 (Reidel Dordrecht, 1981).
- [174] M. Carreau, E. Farhi e S. Gutmann. Functional integral for a free particle in a box. *Physical Review D* **42**, 4, 1194 (1990).
- [175] M. Da Luz e B. K. Cheng. Quantum-mechanical results for a free particle inside a box with general boundary conditions. *Physical Review A* **51**, 3, 1811 (1995).
- [176] J. Kuhn, F. Zanetti, A. Azevedo, A. Schmidt, B. K. Cheng e M. da Luz. Time-dependent point interactions and infinite walls: some results for wavepacket scattering. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **7**, 3, S77 (2005).
- [177] K. Kraus, A. Böhm, J. D. Dollard e W. Wootters. States, effects, and operations fundamental notions of quantum theory (1983).
- [178] H. Guidorizzi. *Um curso de cálculo*. v. 1 (LTC, 2013).

## Operações Locais e Comunicação Clássica

Chamamos de operações locais quaisquer operações quânticas que as partes possam realizar independentemente em seus subsistemas de maneira local, isto é, agindo sobre o seu, e apenas sobre o seu, subsistema. A comunicação clássica, por sua vez, permite que as partes comuniquem-se entre si e correlacionem suas ações.

Vamos considerar um sistema composto,  $Q$ , compartilhado por diversas partes  $A, B, \dots$ . Vamos assumir que o espaço de Hilbert dos graus de liberdade de  $Q$  têm dimensão finita.

Para explicar o efeito de uma operação local em um subsistema, vamos utilizar o formalismo de superoperadores completamente positivos [177]. A operação quântica mais geral  $\epsilon_{i,k}$  agindo localmente apenas no subsistema  $i$ , vamos usar o subsistema  $A$  como exemplo, é implementada através de um conjunto de operadores  $\tilde{O}_{k,j} = A_{k,j} \otimes \mathbb{1}_B \otimes \dots$  com a restrição  $\sum_{k,j} A_{k,j}^\dagger A_{k,j} \leq \mathbb{1}_A$ , com  $A_{k,j} : H_A \rightarrow H'_A$ , o índice  $k$  se referindo aos diferentes resultados caso uma medida seja feita nessa operação local, e  $\mathbb{1}_l$  sendo o operador identidade em  $H_l$ . Como resultado de tal operação, o sistema se torna:

$$\rho_k = \frac{\epsilon_{i,k}(\rho)}{p_k} = \frac{1}{p_k} \sum_j \tilde{O}_{k,j} \rho \tilde{O}_{k,j}^\dagger \quad (\text{A.1})$$

com probabilidade  $p_k = \text{Tr}[\epsilon_{i,k}(\rho)]$ .

A transformação (A.1) pode ser sucintamente escrita como:

L1) Operação quântica unilocal:

$$\rho \rightarrow \{p_k, \rho_k\} \quad (\text{A.2})$$

com  $\rho_k$  e  $p_k$  relacionados ao estado inicial  $\rho$  através do superoperador completamente positivo  $\epsilon_{i,k}$  (A.1).

É importante notar aqui que adotamos o ponto de vista da parte que realizou a operação, e portanto, sabe o resultado desta operação. Sem comunicação clássica, todas as outras partes, desconhecendo o resultado, deveriam escrever  $\rho' = \sum_k p_k \rho_k$ .

A operação L1 pode ser decomposta em quatro operações mais simples:

L1.1) Transformações unitárias unilocais:

$$\rho \rightarrow \rho' = \tilde{U} \rho \tilde{U}^\dagger \quad (\text{A.3})$$

com  $\tilde{U}$  sendo um operador unitário composto por uma transformação unitária, em uma das partes, multiplicada tensorialmente por operadores identidade em todas as outras partes.

L1.2) Medida unilocal de von Neumann:

$$\rho \rightarrow \{\rho_k, p_k\} \quad (\text{A.4})$$

L1.3) Adição de um estado não correlacionado  $\tilde{Q}$  (chamado ancila):

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho \otimes \rho_{\tilde{Q}} \quad (\text{A.5})$$

onde  $\rho_{\tilde{Q}}$  é o estado da ancila.

L1.4) Desfazer-se de uma parte local  $\tilde{Q}$  do sistema completo:

$$\rho \rightarrow \rho' = \text{Tr}_{\tilde{Q}}[\rho] \quad (\text{A.6})$$

onde  $\text{Tr}_{\tilde{Q}}$  indica o traço parcial sobre  $\tilde{Q}$ .

Além das transformações L1, há uma outra, relativa à diminuição de informação disponível. Vamos imaginar que duas partes, Alice e Bob, compartilhem um sistema. Eles combinam operações de forma a transformar, ao final, seu sistema em  $\rho_1$ , com probabilidade  $q_1$ , ou em  $\rho_2$ , com probabilidade  $q_2$ . Podemos escrever

$$\rho \rightarrow \begin{cases} q_1, \rho_1 \\ q_2, \rho_2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Agora, vamos supor que eles percam a informação de qual é o sistema final deles,  $\rho_1$  ou  $\rho_2$ . Dessa maneira, eles são obrigados a escrever

$$\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2 \quad (\text{A.8})$$

Escrevemos, dessa maneira, a transformação L2:

L2) Decréscimo na informação disponível sobre o estado do sistema:

$$\{q_k, \rho_k\} \rightarrow \rho' = \sum_k q_k \rho_k \quad (\text{A.9})$$

## A.1 Monotonicidade local

A partir das transformações L1 (A.2) e L2 (A.9) pode-se obter as duas condições necessárias e suficientes para que uma magnitude  $\mu$  seja, na média, monotônica sob LOCC (acrônimo em inglês para operações locais e comunicação clássica), ou seja, que tal magnitude, na média, não aumente sob tais operações.

C1) Para qualquer  $\rho$  e qualquer operação quântica unilocal  $\epsilon_{i,k}$  realizada em uma parte  $i$ ,

$$\mu(\rho) \geq \sum_k p_k \mu(\rho_k), \quad (\text{A.10})$$

com

$$p_k = \text{Tr}[\epsilon_{i,k}(\rho)], \quad (\text{A.11})$$

e

$$\rho = \frac{1}{p_k} \epsilon_{i,k}(\rho). \quad (\text{A.12})$$

C2) Para qualquer ensemble  $\{q_k, \rho_k\}$

$$\sum_k q_k \mu(\rho_k) \geq \mu(\rho), \quad (\text{A.13})$$

com  $\rho = \sum_k q_k \rho_k$ .

Entre outras coisas, essas condições implicam que estados separáveis possuem um valor  $\mu$  constante,  $\mu_0$ , que corresponde ao valor mínimo de  $\mu$ . Isso acontece devido ao fato de que estados separáveis podem ser convertidos reversivelmente uns nos outros via LOCC, e também devido ao fato de que qualquer sistema pode terminar como um estado separável através da ação de suas partes. Assim, podemos tomar  $\mu_0 = 0$  sem perda de generalidade, e considerar apenas EMs (emaranhamentos monotônicos) não-negativos que sejam nulos para estados separáveis.

$$\mu(\rho) \geq 0; \quad \rho_s \text{ separável} \rightarrow \mu(\rho_s) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Podemos também escrever as condições englobadas por C1 da seguinte maneira:

C1.1)

$$\mu(\rho) = \mu(\tilde{U} \rho \tilde{U}^\dagger) \quad (\text{A.15})$$

C1.2)

$$\mu(\rho) \geq \sum_k p_k \mu(\rho_k), \quad (\text{A.16})$$

caso  $\{\rho_k, p_k\}$  descrevam o estado resultante de uma medida unilocal de von Neumann em  $\rho$ .

C1.3)

$$\mu(\rho) = \mu(\rho \otimes \rho_{\tilde{Q}}), \quad (\text{A.17})$$

sendo  $\rho_{\tilde{Q}}$  qualquer estado de uma ancila local  $\tilde{Q}$ , e

C1.4)

$$\mu(\rho) \geq \mu(\text{Tr}_{\tilde{Q}}[\rho]) \quad (\text{A.18})$$

para qualquer parte local  $\tilde{Q}$  do sistema.

## Medida de correlação através da distância Manhattan, o caso de 2 qubits

Faremos nossa análise considerando o caso de estados de dois qubits com todos os coeficientes do estado reais. Começemos definindo

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + c|01\rangle + d|10\rangle + b|11\rangle \quad (\text{B.1})$$

com

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \quad \text{e} \quad a.b - c.d \neq 0. \quad (\text{B.2})$$

Queremos achar um estado não emaranhado

$$|\phi\rangle = x|00\rangle + z|01\rangle + v|10\rangle + y|11\rangle \quad (\text{B.3})$$

com

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |v|^2 = 1 \quad \text{e} \quad x.y - z.v = 0 \quad (\text{B.4})$$

tal que, a partir da equação (B), minimizemos a seguinte função  $M$ :

$$M(x, y, z, v) = |x - a| + |y - b| + |z - c| + |v - d| \quad (\text{B.5})$$

Assim como  $(a, b, c, d)$  são reais, o conjunto de valores  $(x, y, z, v)$  que minimiza  $M$  (B.5) também será. Para provar isso, vamos considerar um conjunto de valores  $(xe^{i\theta_x}, ye^{i\theta_y}, ze^{i\theta_z}, ve^{i\theta_v})$  que respeite os vínculos (B.4), com  $x, y, z, v, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \theta_v \in \mathbb{R}$ . O valor de  $M$  para esses valores é

$$\begin{aligned} M(xe^{i\theta_x}, ye^{i\theta_y}, ze^{i\theta_z}, ve^{i\theta_v}) &= |xe^{i\theta_x} - a| + |ye^{i\theta_y} - b| + |ze^{i\theta_z} - c| + |ve^{i\theta_v} - d| \\ &= \sqrt{x^2 + a^2 - 2xa \cos \theta_x} + \sqrt{y^2 + a^2 - 2ya \cos \theta_y} \\ &\quad + \sqrt{z^2 + a^2 - 2za \cos \theta_z} + \sqrt{v^2 + a^2 - 2va \cos \theta_v}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Calculando o valor de  $M$  para os valores  $(x, y, z, v)$ , que também respeitarão os

vínculos, obtemos

$$M(x, y, z, v) = \sqrt{x^2 + a^2 - 2xa} + \sqrt{y^2 + a^2 - 2ya} + \sqrt{z^2 + a^2 - 2za} + \sqrt{v^2 + a^2 - 2va}. \quad (\text{B.7})$$

Comparando as equações (B.6) e (B.7), podemos afirmar  $M(xe^{i\theta_x}, ye^{i\theta_y}, ze^{i\theta_z}, ve^{i\theta_v}) \geq M(x, y, z, v)$ . Portanto, sempre existe um conjunto de valores reais  $(x, y, z, v)$  associado a  $(xe^{i\theta_x}, ye^{i\theta_y}, ze^{i\theta_z}, ve^{i\theta_v})$  tal que  $M(xe^{i\theta_x}, ye^{i\theta_y}, ze^{i\theta_z}, ve^{i\theta_v}) \geq M(x, y, z, v)$  e os vínculos (B.4) sejam respeitados. Dessa forma, concluímos que podemos assumir os valores que minimizam a função  $M$  (eq. B.5) como reais.

Para minimizar  $M$  de tal forma que os vínculos (B.4) sejam respeitados, aplicaremos o método dos multiplicadores de Lagrange [178]. Começamos calculando a função auxiliar, que será dada por

$$\mathcal{M} = M + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 + v^2 - 1) + \gamma(xy - zv) \quad (\text{B.8})$$

Vamos definir  $s_x$  como sendo o sinal de  $x - a$ , ou seja, se  $x > a$  temos  $s_x = 1$ , e se  $x < a$  temos  $s_x = -1$ . O mesmo vale para  $s_y, s_z$  e  $s_v$ .

Agora devemos calcular as derivadas parciais em relação às variáveis do problema.  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \lambda} = 0$  e  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \gamma} = 0$  nos levam de volta aos vínculos descritos na equação (B.4). Já  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} = 0$  nos leva às equações

$$s_x + \eta x + \gamma y = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$s_y + \eta y + \gamma x = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$s_z + \eta z - \gamma v = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$s_v + \eta v - \gamma z = 0 \quad (\text{B.12})$$

onde  $\eta = 2\lambda$ .

É importante notar aqui que trataremos o sistema de equações (B.9)-(B.12) assumindo os  $s_i$  como números. Na realidade, eles são funções degrau. Assim, qualquer solução obtida deve ser checada posteriormente para verificar a auto-consistência da mesma em relação aos valores iniciais de todos os  $s_i$ . Os parâmetros iniciais,  $a, b, c$  e  $d$ , entram no cálculo limitando as soluções aceitáveis para  $x, y, z$  e  $v$ .

O sistema de equações (B.9)-(B.12) possui diversas simetrias com relação à escolha dos  $s_i$ . Os casos possíveis são:

- (a) Todos os  $s_i$  iguais:  $s_x = s_y = s_z = s_v = \pm 1$ , ou seja, há duas possibilidades. Ambas as soluções são equivalentes, uma podendo ser obtida da outra através da troca de variáveis  $\eta \rightarrow -\eta$  e  $\gamma \rightarrow -\gamma$ , lembrando que ainda é necessário olhar se a solução será auto-consistente.
- (b) Três  $s_i$ 's com o mesmo sinal e um diferente, totalizando oito possibilidades. Entretanto, formalmente os casos são equivalentes, a menos das condições de auto-consistência.

- (c) Os  $s_i$ 's iguais 2 a 2, totalizando seis possibilidades. Temos basicamente dois casos não equivalentes. O primeiro se dá caso tenhamos  $s_x = s_y$  e  $s_z = s_v$ . O outro caso é dado tanto por  $s_x = s_z$  e  $s_y = s_v$  quanto por  $s_x = s_v$  e  $s_y = s_z$
- (d) É possível termos  $s_i = 0$ , caso que será discutido à parte.

## B.1 Soluções para os sistemas

Prosseguindo nosso trabalho, iremos encontrar as soluções para cada um dos sistemas possíveis gerados pelas equações (B.9)-(B.12) ao se tomar diferentes valores de  $s_i$ . Notamos desde já, que ao fazermos  $\eta \rightarrow -\eta$  e  $\gamma \rightarrow -\gamma$ , obtemos que sistemas com coeficientes  $(-s_x, -s_y, -s_z, -s_v)$  tornam-se sistemas com coeficientes  $(s_x, s_y, s_z, s_v)$ , possuindo as mesmas soluções. Dessa forma, tendo sendo resolvido um deles, o outro será omitido. Abaixo, iremos apresentar as soluções dos sistemas, junto aos limites em que elas são válidas.

### B.1.1 Todos os $s_i$ iguais

Vamos tratar primeiramente o caso em que temos todos os  $s_i$  iguais.

#### B.1.1.0 Coeficientes $s_x = 1$ $s_y = 1$ $s_z = 1$ $s_v = 1$

O sistema de equações que temos de resolver nesse caso é dado por

$$1 + \eta x + \gamma y = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$1 + \eta y + \gamma x = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$1 + \eta z - \gamma v = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$1 + \eta v - \gamma z = 0, \quad (\text{B.16})$$

lembrando que também temos os vínculos (B.2).

A partir das equações (B.13) e (B.14), podemos obter

$$(x - y) [1 + \eta(x + y)] = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$(x - y) [1 + \gamma(x + y)] = 0. \quad (\text{B.18})$$

A partir de (B.15) e (B.16), por sua vez, temos que

$$(z - v) [1 + \eta(z + v)] = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$(z - v) [1 - \gamma(z + v)] = 0. \quad (\text{B.20})$$

As equações (B.17) e (B.18) nos deixam com duas opções:

- $x = y$  e, a partir de (B.15),  $z = -\frac{1}{\eta - \gamma}$ .



- $x \neq y$ , e portanto,  $x \neq -y$  e  $\eta = -\gamma$ .

As equações (B.19) e (B.19) também nos deixam com duas opções:

- $z = v$ , e a partir de (B.17),  $z = -\frac{1}{\eta-\gamma}$ .
- $z \neq v$ , e portanto  $z \neq -v$  e  $\eta = -\gamma$ .

Vamos analisar as quatro possibilidades de soluções formadas pelas duas duplas de opções apresentadas.

- Opção 1

$$x = y; x = -\frac{1}{\eta+\gamma}; z = v; z = -\frac{1}{\eta-\gamma}$$

A partir de (B.2), temos  $x^2 = z^2$ , que por sua vez nos leva a  $2\eta\gamma = -2\eta\gamma$ , com soluções  $\eta = 0$  ou  $\gamma = 0$ . Assumindo  $\eta = 0$ , obtemos  $x = y = -z = -v$ , com soluções  $(x, y, z, v) = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})$ . Assumindo  $\gamma = 0$ , obtemos  $x = y = z = v$ , com soluções  $(x, y, z, v) = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ .

- Opção 2

$$x = y; x = -\frac{1}{\eta+\gamma}; z \neq v; z \neq -v; \eta = -\gamma$$

Da equação (B.13) temos

$$1 - \gamma x + \gamma x = 0 \rightarrow 1 = 0, \quad (\text{B.21})$$

e portanto a opção 2 não é consistente.

- Opção 3

$$x \neq y; x \neq y; \eta = \gamma; z = v.$$

Da equação (B.15) temos

$$1 + \gamma - \gamma z = 0 \rightarrow 1 = 0, \quad (\text{B.22})$$

logo, a opção 3 também não é consistente.

- Opção 4

$$x \neq y; x \neq y; \eta = \gamma; z \neq v; z \neq -v; \eta = -\gamma.$$

A única solução que satisfaz as equações  $\eta = \gamma$  e  $\eta = -\gamma$  é  $\eta = \gamma = 0$ . Tal solução, entretanto, não é condizente com as equações (B.13)-(B.16), o que caracteriza a opção 4 como inconsistente.

B.1.2 Apenas um  $s$  diferenteB.1.2.0 Sistema ( $s_x = -1$ ,  $s_y = 1$ ,  $s_z = 1$ ,  $s_v = 1$ )

Vamos agora tratar de um sistema em que todos os  $s$ 's são iguais, menos um.

$$-1 + \eta x + \gamma y = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$1 + \eta y + \gamma x = 0, \quad (\text{B.24})$$

$$1 + \eta z - \gamma v = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$1 + \eta v - \gamma z = 0. \quad (\text{B.26})$$

Podemos manipular essas equações de modo a obter:

$$(x + y)[1 + \eta(y - x)] = 0, \quad (\text{B.27})$$

$$(x + y)[1 - \gamma(y - x)] = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$(v - z)[1 + \eta(v + z)] = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$(v - z)[1 - \gamma(v + z)] = 0 \quad (\text{B.30})$$

Analisando as equações (B.27) e (B.28), observamos duas possibilidades:

- $x+y=0$ , e nesse caso, a partir de (B.23) e (B.24), obtemos

$$x(\eta - \gamma) = 1 \quad (\text{B.31})$$

- $x + y \neq 0$ , então  $y - x \neq 0$  e  $\eta = -\gamma$ , com

$$\eta = -\frac{1}{y - x} \quad (\text{B.32})$$

Das equações (B.29) e (B.30) obtemos também duas possibilidades:

- $v - z = 0$ , então de (B.25) e (B.26) obtemos

$$z(\eta - \gamma) = -1 \quad (\text{B.33})$$

- $v - z \neq 0$ , então  $v + z \neq 0$  e  $\eta = -\gamma$ , com

$$\eta = -\frac{1}{v + z} \quad (\text{B.34})$$

Dessa maneira, podemos construir quatro possibilidades de solução:

- (a)  $x = -y$  e  $v = z$ , com  $x = -z$ .
- (b)  $x = -y$  e  $v \neq \pm z$ , com  $2x = -v - z$ .

- (c)  $x \neq \pm -y$ ,  $v = z$ ,  $2z = y - x$ .
- (d)  $x \neq \pm y$ ,  $z \neq \pm v$ , com  $y - x = v + z$

Vamos considerar separadamente cada um dos casos:

- (a) Podemos obter, a partir da equação (B.4),  $x = 0$ , e portanto,  $y = z = v = 0$ . Dessa forma, a normalização não é satisfeita e soluções do tipo (a) não são consistentes.
- (b) A partir dos vínculos (B.4), obtemos

$$2x^2 + z^2 + v^2 = 1 \quad , \quad x^2 = -vz, \quad (\text{B.35})$$

o que nos permite obter  $v = z \pm 1$  e  $x = -z \pm 1/2$ . Dessa maneira, utilizando a normalização (B.4), obtemos

$$z^2 \pm z + \frac{1}{8} = 0, \quad (\text{B.36})$$

o que por fim nos leva às seguinte soluções:

$$\begin{cases} z = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ x = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\} \end{cases} \quad (\text{B.37})$$

- (c) Novamente a partir dos vínculos (B.4), obtemos

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \quad , \quad xy = z^2, \quad (\text{B.38})$$

e assim, temos  $y = -x \pm 1$  e  $z = -x \pm 1/2$ , de forma que, utilizando a normalização (B.4), obtemos

$$x^2 \pm x + 1/8 = 0 \quad (\text{B.39})$$

o que nos leva às soluções

$$\begin{cases} x = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ z = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

- (d) A partir das equações (B.4), e lembrando-nos de que para este caso temos  $y = x + v + z$ , temos

$$x^2 + z^2 + x(z + v) + zv = 1/2, \quad (\text{B.41})$$

$$x^2 + x(z + v) = vz. \quad (\text{B.42})$$

A partir das equações (B.41) e (B.42), podemos obter

$$v = -z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.43})$$

e portanto,

$$y = x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.44})$$

Substituindo (B.43) e (B.44) em (B.42), temos

$$x^2 \pm \frac{x}{\sqrt{2}} = -z^2 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.45})$$

de forma que podemos escrever

$$z_{\oplus} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_{\pm}(x)}, \quad (\text{B.46})$$

com  $\oplus = \pm$ , e

$$F_{\pm}(x) = \frac{1}{8} - (x^2 \pm \frac{x}{\sqrt{2}}). \quad (\text{B.47})$$

Dessa maneira,

$$\begin{cases} y = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_{\pm}(x)} \\ v_{\oplus} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{F_{\pm}(x)} \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

com  $\ominus = -\oplus$ .

Não podemos nos esquecer que, dado que aparece dentro de uma raiz, precisamos ter  $F_{\pm}(x) > 0$  para que  $z$  e  $v$  sejam reais. Logo, precisamos de

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_{+}(x) \quad (\text{B.49})$$

e

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_{-}(x) \quad (\text{B.50})$$

Precisamos também que as outras variáveis estejam em intervalos apropriados. Primeiro, podemos notar que  $0 \leq F_{\pm}(x) \leq 1/2$ . Utilizando os extremos para  $x$  dados acima, vamos analisar primeiro o caso  $F_{+}(x)$ :

$$y \rightarrow y = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{B.51})$$

$$z \rightarrow z_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_{+}} \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq z \leq +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{B.52})$$

$$v \rightarrow v_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{F_{+}} \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq v \leq +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{B.53})$$

Para  $F_-(x)$ ,

$$y \rightarrow y = x - \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{B.54})$$

$$z \rightarrow z_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_-} \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq z \leq +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{B.55})$$

$$v \rightarrow v_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{F_-} \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq v \leq +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{B.56})$$

Assim, temos as soluções e seus limites de existência.

#### B.1.2.0 Sistema ( $s_x = 1, s_y = -1, s_z = 1, s_v = 1$ )

As soluções são obtidas de modo semelhante às do sistema com ( $s_x = -1, s_y = 1, s_z = 1, s(v)$ ), e dadas por:

$$\begin{cases} z = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ x = \{\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\} \end{cases} \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{cases} y = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ x = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ z = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\}. \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

Temos também soluções geradas pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} x = y \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_{\pm}(y)} \\ v_{\oplus} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{F_{\pm}(y)} \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

com

$$F_{\pm}(y) = \frac{1}{8} - (y^2 \pm \frac{y}{\sqrt{2}}). \quad (\text{B.60})$$

e limites delimitados por

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_+(y) \quad (\text{B.61})$$

e

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_-(y) \quad (\text{B.62})$$

para  $y$ . Os limites para as outras variáveis decorrem dos limites de  $y$ .

B.1.2.0 Sistema ( $s_x = 1, s_y = 1, s_z = -1, s_v = 1$ )

As soluções para esses sistemas são dadas por

$$\begin{cases} x = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ z = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\} \end{cases} \quad (\text{B.63})$$

e

$$\begin{cases} z = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ x = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\}. \end{cases} \quad (\text{B.64})$$

Também temos soluções geradas pelas expressões:

$$\begin{cases} v = z \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_{\pm}(z)} \\ y_{\oplus} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{F_{\pm}(z)}, \end{cases} \quad (\text{B.65})$$

com

$$F_{\pm}(z) = \frac{1}{8} - (z^2 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}). \quad (\text{B.66})$$

e limites de soluções delimitados por

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq z \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_+(z) \quad (\text{B.67})$$

e

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq z \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_-(z) \quad (\text{B.68})$$

para  $z$ , com os limites das outras variáveis atrelados a este.

B.1.2.0 Sistema ( $s_x = 1, s_y = 1, s_z = 1, s_v = -1$ )

Temos soluções dadas por

$$\begin{cases} x = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ v = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ z = \{\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\} \end{cases} \quad (\text{B.69})$$

e

$$\begin{cases} v = \{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ z = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ x = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\} \\ y = \{-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\}. \end{cases} \quad (\text{B.70})$$

Também temos soluções geradas pelas expressões:

$$\begin{cases} z = v \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_{\oplus} = \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{F_{\pm}(v)} \\ y_{\oplus} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{F_{\pm}(v)}, \end{cases} \quad (\text{B.71})$$

com

$$F_{\pm}(v) = \frac{1}{8} - (v^2 \pm \frac{v}{\sqrt{2}}). \quad (\text{B.72})$$

e limites de soluções delimitados por

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq v \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_+(v) \quad (\text{B.73})$$

e

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq v \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{para } F_-(v) \quad (\text{B.74})$$

para  $v$ .

### B.1.3 $s_i$ iguais dois a dois

Daremos prosseguimento à análise dos casos do sistema (B.9)-(B.12) que possuem  $s$ 's iguais dois a dois.

#### B.1.3.0 Sistema ( $s_x = -1, s_y = -1, s_z = 1, s_v = 1$ )

Trataremos agora do seguinte sistema:

$$-1 + \eta x + \gamma y = 0, \quad (\text{B.75})$$

$$-1 + \eta y + \gamma x = 0, \quad (\text{B.76})$$

$$1 + \eta z - \gamma v = 0, \quad (\text{B.77})$$

$$1 + \eta v - \gamma z = 0. \quad (\text{B.78})$$

A partir das equações (B.75) e (B.76), podemos obter

$$(x - y) [1 - \eta(x + y)] = 0, \quad (\text{B.79})$$

$$(x - y) [1 - \gamma(x + y)] = 0. \quad (\text{B.80})$$

Da maneira semelhante, a partir das equações (B.77) e (B.78), temos

$$(v - z) [1 + \eta(v + z)] = 0, \quad (\text{B.81})$$

$$(v - z) [1 - \gamma(v + z)] = 0. \quad (\text{B.82})$$

A partir de (B.79) e (B.80), temos duas opções

- $x = y$
- $x \neq y, x \neq -y, \eta = \gamma.$

De (B.81) e (B.82), temos também as opções

- $v = z$
- $v \neq z, v \neq -z, \eta = -\gamma.$

Utilizando raciocínio semelhante ao da seção (B.1.1), onde todos os  $s$ 's eram iguais, chegamos à conclusão de que as únicas soluções possíveis são dadas para  $x = y$  e  $v = z$ , sendo elas  $(x, y, z, v) = (\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$  e  $(x, y, z, v) = (\mp 1/2, \mp 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ . Os sistemas com  $(s_x = -1, s_y = 1, s_z = -1, s_v = 1)$  e  $(s_x = -1, s_y = 1, s_z = 1, s_v = -1)$  possuem as mesmas soluções.

## B.2 Tratamento de casos com $s_i = 0$

Retomando nosso problema desde o início, temos de minimizar a função (B.5):

$$F = |x - a| + |y - b| + |z - c| + |v - d| \quad .$$

Resolvemos os casos em que as variáveis são diferentes das constantes associadas a elas dentro dos módulos. Podemos, entretanto, imaginar um caso em que uma variável coincida com a constante associada a ela dentro de um módulo. A função  $|x - a|$ , por exemplo, não possui derivada definida no ponto  $x = a$ , e assim não podemos estender os cálculos feitos na seção B.1 a esses casos, pois tais derivadas surgem na aplicação dos multiplicadores de Lagrange. Precisamos reformular o problema, agora assumindo desde o início determinadas variáveis com um valor fixo. Vamos começar encontrando soluções em que  $x = a$ , com  $y \neq b, z \neq c$  e  $v \neq d$ .

### B.2.1 Estados com $x = a$

A função a ser minimizada, nesse caso, seria

$$F = |y - b| + |z - c| + |v - d|, \quad (\text{B.83})$$

como podemos ver a partir da equação (B.5).



Aplicando os multiplicadores de Lagrange, obtemos a seguinte função auxiliar

$$\Gamma = |y - b| + |z - c| + |v - d| + \lambda(ay - zv) + \beta(a^2 + y^2 + z^2 + v^2 - 1), \quad (\text{B.84})$$

e igualando as derivadas parciais a zero, obtemos

$$\begin{aligned} S_y + \eta y + \gamma a &= 0 \\ S_z + \eta z - \gamma v &= 0 \\ S_v + \eta v - \gamma z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Notamos novamente que, se fizermos  $(S_y \rightarrow -S_y, S_z \rightarrow -S_z, S_v \rightarrow -S_v)$ , as soluções do sistema permanecem as mesmas. Portanto, omitiremos a solução de casos cujo equivalente já tenha sido resolvido. A seguir, começaremos a solução de cada um dos sistemas.

#### B.2.1.0 Sistema $(s_y = 1, s_z = 1, s_v = 1)$

A partir do sistema de equações (B.85), montamos o sistema que devemos resolver:

$$\begin{aligned} 1 + \eta y + \gamma a &= 0 \\ 1 + \eta y - \gamma v &= 0 \\ 1 + \eta v - \gamma z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

manipulando o sistema (B.86), podemos montar outras duas equações

$$\begin{aligned} (z - v)[1 + \eta(z + v)] &= 0 \\ (z - v)[1 - \gamma(z + v)] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Como em casos anteriores, essas equações (B.87) nos deixam com duas opções:

- *Opção 1:  $z=v$*

Nesse caso, os vínculos (B.4) nos dão

$$ya = z^2, \quad (\text{B.88})$$

$$a^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 1. \quad (\text{B.89})$$

Substituindo (B.88) em (B.89), obtemos

$$(a + y)^2 = 1, \quad (\text{B.90})$$

o que nos leva às soluções

$$\begin{aligned} y &= \pm 1 - a_{\pm}, \\ z &= \oplus \sqrt{-a_{\pm}^2 \pm a_{\pm}}, \\ v &= \oplus \sqrt{-a_{\pm}^2 \pm a_{\pm}}, \end{aligned} \tag{B.91}$$

sendo que a existência dessas soluções dependem de  $a$  estar dentro dos limites

$$0 \leq a_+ \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq a_- \leq 0. \tag{B.92}$$

- *Opção 2:*  $z \neq v$ , com  $\eta = -\gamma$ .

A partir do sistema (B.86), podemos afirmar

$$y - a = z + v. \tag{B.93}$$

Combinando a equação (B.93) aos vínculos (B.4), obtemos

$$\begin{aligned} z &= -v \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y &= a \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{B.94}$$

Ao novamente aplicar os vínculos às expressões (B.94), obtemos as soluções desejadas:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + a_{\pm}, \tag{B.95}$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \pm \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}, \tag{B.96}$$

$$v = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \pm \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}. \tag{B.97}$$

Essas soluções existem caso  $a_{\pm}$  esteja dentro dos limites

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_+ \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_- \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \tag{B.98}$$

B.2.1.0 Sistema ( $s_y = -1, s_z = 1, s_v = 1$ )

A partir das equações (B.85), montamos o sistema a ser resolvido:

$$\begin{aligned} -1 + \eta y + \gamma a &= 0 \\ 1 + \eta y - \gamma v &= 0 \\ 1 + \eta v - \gamma z &= 0. \end{aligned}$$

As soluções são obtidas utilizando procedimento semelhante ao utilizado para sistemas com ( $S_y = 1, S_z = 1, S_v = 1$ ), e dadas em duas condições:

- *Caso  $z = v$*

As soluções são dadas por

$$\begin{aligned} y &= \pm 1 - a_{\pm}, \\ z &= \oplus \sqrt{-a_{\pm}^2 \pm a_{\pm}}, \\ v &= \oplus \sqrt{-a_{\pm}^2 \pm a_{\pm}}, \end{aligned} \tag{B.99}$$

com a existência das soluções condicionada a  $a$  estar dentro dos limites

$$0 \leq a_+ \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq a_- \leq 0. \tag{B.100}$$

- *Caso  $z \neq v$*

As soluções são dadas por

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + a_{\pm}, \tag{B.101}$$

$$z = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \pm \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}, \tag{B.102}$$

$$v = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \pm \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}. \tag{B.103}$$

A condição de existência de tais soluções é

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_+ \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_- \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \tag{B.104}$$

B.2.1.0 Sistema ( $s_y = 1, s_z = -1, s_v = 1$ )

A partir das equações (B.85), obtemos o sistema a ser resolvido:

$$\begin{aligned} 1 + \eta y + \gamma a &= 0 \\ -1 + \eta y - \gamma v &= 0 \\ 1 + \eta v - \gamma z &= 0. \end{aligned}$$

As soluções para tal sistema são dadas por

- *Caso*  $z = -v$

As soluções são dadas por

$$\begin{aligned} y &= \pm 1 + a_{\pm}, \\ z &= \oplus \sqrt{-a_{\pm}^2 \mp a_{\pm}}, \\ v &= \ominus \sqrt{-a_{\pm}^2 \mp a_{\pm}}, \end{aligned} \tag{B.105}$$

com a existência das soluções condicionada a  $a$  estar dentro dos limites

$$0 \leq a_- \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq a_+ \leq 0. \tag{B.106}$$

- *Caso*  $z \neq -v$

As soluções são dadas por

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} - a_{\pm}, \tag{B.107}$$

$$z = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \mp \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}, \tag{B.108}$$

$$v = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \mp \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}. \tag{B.109}$$

A condição de existência de tais soluções é

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_- \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_+ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \tag{B.110}$$

B.2.1.0 Sistema ( $s_y = 1, s_z = 1, s_v = -1$ )

O sistema a ser resolvido é dado por:

$$\begin{aligned} 1 + \eta y + \gamma a &= 0 \\ -1 + \eta y - \gamma v &= 0 \\ 1 + \eta v - \gamma z &= 0. \end{aligned}$$

As soluções dividem-se em dois tipos:

- *Caso*  $z = -v$

As soluções são dadas por

$$\begin{aligned} y &= \pm 1 + a_{\pm}, \\ v &= \oplus \sqrt{-a_{\pm}^2 \mp a_{\pm}}, \\ z &= \ominus \sqrt{-a_{\pm}^2 \mp a_{\pm}}, \end{aligned} \quad (\text{B.111})$$

com a existência das soluções condicionada a  $a$  estar dentro dos limites

$$0 \leq a_- \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq a_+ \leq 0. \quad (\text{B.112})$$

- *Caso*  $z \neq -v$

As soluções são dadas por

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} - a_{\pm}, \quad (\text{B.113})$$

$$v = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \mp \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}, \quad (\text{B.114})$$

$$z = \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - 4 \left( a_{\pm}^2 \mp \frac{a_{\pm}}{\sqrt{2}} \right)}. \quad (\text{B.115})$$

A condição de existência de tais soluções é

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_- \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq a_+ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.116})$$

### B.2.2 Estados com $y = b$

Para o caso em que a variável  $y$  tem valor  $b$ , o conjunto de equação a ser resolvido será dado por

$$\begin{aligned} S_x + \eta x + \gamma b &= 0, \\ S_z + \eta z - \gamma v &= 0, \\ S_v + \eta v - \gamma z &= 0. \end{aligned}$$

Esse conjunto de equações é idêntico ao caso  $x = a$  (eq. B.85), feitas as trocas  $y \rightarrow x$  e  $a \rightarrow b$ . Assim, as soluções e limites são idênticos, bastando fazer essa substituição.

B.2.3 Estados com  $z = c$ 

Para  $z = c$ , nosso conjunto de equações é gerado a partir do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} S_x + \eta x + \gamma y &= 0, \\ S_y + \eta y + \gamma x &= 0, \\ S_v + \eta v - \gamma c &= 0. \end{aligned}$$

As soluções são obtidas de maneira semelhante ao modo como o são para o sistema (B.85), e são apresentadas a seguir.

B.2.3.0 Sistema ( $s_x = 1, s_y = 1, s_v = 1$ )

O sistema é composto pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} 1 + \eta x + \gamma y &= 0, \\ 1 + \eta y + \gamma x &= 0, \\ 1 + \eta v - \gamma c &= 0. \end{aligned}$$

As soluções são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} v &= \pm 1 - c_{pm}, \\ x &= \oplus \sqrt{-c_{\pm}^2 \pm c}, \\ y &= \oplus \sqrt{-c_{\pm}^2 \pm c}, \end{aligned} \tag{B.117}$$

onde os limites a ser respeitados são

$$0 \leq c_+ \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq c_- \leq 0. \tag{B.118}$$

As seguintes expressões também representam soluções:

$$\begin{aligned} v &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + c_{\pm}, \\ x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \pm \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \pm \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}. \end{aligned} \tag{B.119}$$

A condição de existência de tais soluções é

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_+ \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_- \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \tag{B.120}$$

B.2.3.0 Sistema ( $s_x = -1, s_y = 1, s_v = 1$ )

Temos, nesse caso, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 1 + \eta x + \gamma y &= 0, \\ 1 + \eta y + \gamma x &= 0, \\ 1 + \eta v - \gamma c &= 0. \end{aligned}$$

As soluções são representadas por dois conjuntos de expressões. O primeiro sendo

$$\begin{aligned} v &= \pm 1 + c_{\pm}, \\ x &= \oplus \sqrt{-c_{\pm}^2 \mp c_{\pm}}, \\ y &= \ominus \sqrt{-c_{\pm}^2 \mp c_{\pm}}, \end{aligned} \tag{B.121}$$

com limites

$$0 \leq c_- \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq c_+ \leq 0. \tag{B.122}$$

As seguintes expressões também representam soluções:

$$\begin{aligned} v &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} - c_{\pm}, \\ x &= \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \mp \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \mp \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \end{aligned} \tag{B.123}$$

com limites de validade dados por

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_- \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_+ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \tag{B.124}$$

B.2.3.0 Sistema ( $s_x = 1, s_y = -1, s_v = 1$ )

O sistema que precisamos resolver é dado por:

$$\begin{aligned} 1 + \eta x + \gamma y &= 0, \\ 1 + \eta y + \gamma x &= 0, \\ 1 + \eta v - \gamma c &= 0. \end{aligned}$$

As soluções são

$$\begin{aligned} v &= \pm 1 + c_{pm}, \\ x &= \oplus \sqrt{-c_{\pm}^2 \mp c_{\pm}}, \\ y &= \ominus \sqrt{-c_{\pm}^2 \mp c_{\pm}}, \end{aligned} \tag{B.125}$$

com limites

$$0 \leq c_- \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq c_+ \leq 0. \tag{B.126}$$

As expressões a seguir também são soluções para o sistema:

$$\begin{aligned} v &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} - c_{\pm}, \\ x &= \mp \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \mp \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \mp \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \end{aligned} \tag{B.127}$$

com limites de validade dados por

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_- \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_+ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \tag{B.128}$$

#### B.2.3.0 Sistema ( $s_x = 1, s_y = 1, s_v = -1$ )

Temos que resolver o sistema constituído pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} 1 + \eta x + \gamma y &= 0, \\ 1 + \eta y + \gamma x &= 0, \\ 1 + \eta v - \gamma c &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \pm 1 - c_{pm}, \\ x &= \oplus \sqrt{-c_{\pm}^2 \pm c_{\pm}}, \\ y &= \oplus \sqrt{-c_{\pm}^2 \pm c_{\pm}}, \end{aligned} \tag{B.129}$$

com limites

$$0 \leq c_+ \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq c_- \leq 0. \tag{B.130}$$



As expressões a seguir também são soluções para o sistema:

$$\begin{aligned} v &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} - c_{\pm}, \\ x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \oplus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \pm \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \ominus \sqrt{\frac{1}{2} - 4(c_{\pm}^2 \pm \frac{c_{\pm}}{\sqrt{2}})}, \end{aligned} \quad (\text{B.131})$$

com limites de validade dados por

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_- \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \leq c_+ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.132})$$

### B.3 Soluções de sistemas com duas variáveis fixas

Vamos tratar agora de sistemas com duas variáveis pré-determinadas. Dessa vez, não iremos montar sistemas e resolvê-los, mas abordar o problema de maneira mais simples.

#### B.3.1 Soluções com $x = a$ e $y = b$

Começaremos assumindo  $x = a$  e  $y = b$  na expressão (B.3). A partir de (B.4), podemos escrever:

$$zv = ab \quad \text{e} \quad z^2 + v^2 = 1 - a^2 - b^2. \quad (\text{B.133})$$

A partir de (B.133), construímos

$$(z + v)^2 = 1 - (a - b)^2 \rightarrow z + v = \pm \sqrt{1 - (a - b)^2}, \quad (\text{B.134})$$

$$(z - v)^2 = 1 - (a + b)^2 \rightarrow z - v = \pm \sqrt{1 - (a + b)^2}. \quad (\text{B.135})$$

A partir das equações (B.134) e (B.135), encontramos valores possíveis para  $z$  e  $v$ :

$$z = \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - (a - b)^2} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{1 - (a + b)^2}, \quad (\text{B.136})$$

$$v = \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - (a - b)^2} \ominus \frac{1}{2} \sqrt{1 - (a + b)^2}. \quad (\text{B.137})$$

Algumas condições terão de ser satisfeitas para que essas soluções sejam válidas. A primeira diz respeito aos termos dentro da raiz pertencerem ao conjunto dos números reais:

$$(a - b)^2 \leq 1 \quad \text{e} \quad (a + b)^2 \leq 1. \quad (\text{B.138})$$

Além disso, temos também  $z^2 \leq 1$  e  $v^2 \leq 1$ .

As soluções para o caso em que  $z = c$  e  $v = d$  são idênticas, bastando fazer  $z \rightarrow x$ ,  $v \rightarrow y$ ,  $a \rightarrow c$  e  $b \rightarrow d$ .

### B.3.2 Soluções com $x = a$ e $z = c$

Fixando em  $a$  e  $c$  os valores das variáveis  $x$  e  $z$  em (B.4), obtemos, caso  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ ,

$$ay = cv \quad \text{e} \quad a^2 + y^2 + c^2 + v^2 = 1. \quad (\text{B.139})$$

A partir de (B.140), podemos escrever

$$a^2 + y^2 + c^2 + \frac{a^2}{c^2}y^2 = 1, \quad (\text{B.140})$$

de maneira que

$$y = \pm \sqrt{\frac{1 - a^2 - c^2}{1 + \frac{a^2}{c^2}}} \quad (\text{B.141})$$

e

$$v = \pm \sqrt{\frac{1 - a^2 - c^2}{1 + \frac{a^2}{c^2}}} \cdot \text{sign} \frac{a}{c} \quad (\text{B.142})$$

Para  $c = 0$  e  $a \neq 0$ , temos, de (B.139), as soluções

$$y = 0 \quad \text{e} \quad v = \pm \sqrt{1 - a^2}. \quad (\text{B.143})$$

Caso  $c \neq 0$ ,  $a = 0$ , teremos

$$v = 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{1 - c^2}. \quad (\text{B.144})$$

Por fim, para  $c = 0$  e  $a = 0$ , a solução é dada por  $y = \pm \sqrt{1 - v^2}$ .

As soluções são as mesmas para os casos  $(x = a, v = d)$ ,  $(y = b, z = c)$  e  $(y = b, z = c)$ , bastando fazer a troca apropriada de variáveis.

## B.4 Minimizando $M$

Encontradas todas as soluções para todas as possibilidades e desdobramentos de  $M$  (eq. B.5), podemos calcular cada um dos mínimos e compará-los, de maneira a achar o mínimo global. Algum cuidado é necessário aqui. Dado um conjunto de valores  $(x, y, z, v)$  que seja solução, além de esses valores serem obrigados a estar dentro dos limites encontrados nos cálculos efetuados na seção B.1, eles também precisam respeitar as desigualdades estabelecidas pelos valores de  $s_i$ . Assim, caso tenhamos  $s_x = 1$ ,  $s_y = -1$ ,  $s_z = 1$  e  $s_v = 1$ , necessariamente temos de impor  $x > a$ ,  $y < b$ ,  $z > c$  e  $d > v$ . Com o desenvolvimento analítico feito, fica simples implementar computacionalmente a solução do problema. Cada um dos mínimos é calculado e se verifica se a solução está dentro dos limites estabelecidos. Ao final, todas as soluções válidas são comparadas e estabelece-se um mínimo global, com  $M(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}, v_{\min})$  sendo a medida de emaranhamento desejada.